

Esta cartilla pertenece a la serie Unidades didácticas en Educación Matemática de “una empresa docente” (Facultad de Educación, Universidad de los Andes) y ediciones SM. Propone el diseño de una unidad didáctica con el que se busca contribuir al aprendizaje del método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales 2×2 . Para ello, la cartilla presenta el material que el profesor de matemáticas de educación media requiere para implementar la unidad didáctica en el aula. La cartilla fue elaborada por el grupo 4 de la primera promoción de la maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes.

La cartilla se compone de cuatro partes. La primera presenta los aspectos que el profesor debe tener en cuenta antes de implementar las tareas propuestas en la unidad didáctica. La segunda contiene los objetivos de aprendizaje propuestos para los estudiantes y la metodología sugerida al profesor. La tercera describe la fundamentación y secuencia de tareas que conforman la unidad didáctica, e incluye el material fotocopiable para los estudiantes. Por último, se indican sugerencias para evaluar a los estudiantes y se presentan pautas para identificar su nivel de desempeño y determinar el logro de los objetivos de aprendizaje.

La secuencia de tareas busca contribuir a que los estudiantes apliquen el método gráfico para obtener puntos de corte entre rectas como solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas; comprendan la noción de solución de un sistema lineal, al relacionar la existencia de una única solución, infinitas soluciones o ninguna solución con la posición relativa de las rectas en el plano; y modelen gráficamente situaciones no rutinarias mediante sistemas de ecuaciones lineales y establezcan la relación funcional entre variables. Las tareas están elaboradas para ser implementadas con estudiantes de grado noveno de educación básica. El diseño surge de la necesidad de contribuir al logro del estándar curricular “identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales”.

Fernando Torres
Paola Castro
Mónica Bernal
Andrés Pinzón
Isabel Romero

Autores

Serie Unidades didácticas
en Educación Matemática

Método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales 2×2

Pedro Gómez
Fernando Torres

Edición académica



Universidad de
los Andes
Facultad de Educación

“una empresa docente”, CIFE
Colección en Educación Matemática

ISBN 978-958-773-856-8



Universidad de
los Andes
Facultad de Educación



Fernando Torres
Paola Castro
Mónica Bernal
Andrés Pinzón
Isabel Romero


Autores

Serie Unidades didácticas
en educación matemática

Método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales 2×2

Primera edición: 15 de junio de 2016

Serie Unidades didácticas en Educación Matemática
“una empresa docente” (Facultad de Educación, Universidad de los Andes)

Ediciones SM

© Universidad de los Andes, Centro de Investigación y Formación
en Educación (CIFE), respecto a esta edición

DIRECTOR	Pedro Gómez
EDICIÓN ACADÉMICA	Pedro Gómez Fernando Torres
COORDINACIÓN EDITORIAL	Marta Osorno
AUTORES	Fernando Torres Paola Castro Mónica Bernal Andrés Pinzón Isabel Romero
DISEÑO	Rocío Duque

© Ediciones SM
ISBN: 978-958-773-856-8
Depósito legal

Impreso en Colombia - Printed in Colombia

Esta publicación se realizó en el marco del programa de investigación 5424, correspondiente a la convocatoria 731 de 2015 que tiene el apoyo del Fondo Francisco José de Caldas (Colciencias).

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida ni en su todo ni en sus partes, ni registrada en o transmitida por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o cualquier otro, sin el permiso previo por escrito de la editorial.

Contenido

1	Introducción. Antes de implementar la cartilla	5
2	Tareas e implementación de la cartilla	11
3	Tarea diagnóstica: Figuras con tres rectas (TD). Sesiones 1 y 2	13
4	Tarea 1: Sistemas equivalentes (T1). Sesiones 3 y 4	17
5	Tarea 2: Rectas en el plano (T2). Sesión 5	20
6	Tarea 3: Encontrar Rectas (T3). Sesiones 6 y 7	24
7	Tarea 4: Bus y Carro (T4). Sesión 8	28
8	Tarea 5: Copias (T5). Sesión 9	35
9	Tarea 6: Heladería (T6). Sesión 10	39
10	Evaluación final: Tarea Gran premio de Brasil (EF) Sesión 11	42
11	Referencias	48
12	Material fotocopiable	49

1 Introducción.

Antes de implementar la cartilla

Esta cartilla pertenece a la serie Unidades didácticas en la Educación Matemática. Presenta la unidad didáctica *Método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales 2×2* , elaborada por el grupo 4 de la primera promoción de la concentración en Educación Matemática de la maestría en Educación de la Universidad de los Andes y adaptada por GEMAD como herramienta de ayuda para que el profesor de matemáticas de educación básica o media pueda implementarla en el aula.

La cartilla se compone de cuatro partes. En la primera, incluimos el análisis previo del tema que el profesor debe tener en cuenta antes de implementar las tareas propuestas en la unidad didáctica. En la segunda, hacemos una relación de los objetivos de aprendizaje propuestos para los estudiantes y presentamos sugerencias metodológicas para el profesor. En la tercera parte, describimos la fundamentación y secuencia de tareas que conforman la unidad didáctica e incluimos el material fotocopiable para los estudiantes. En la última parte, proponemos sugerencias para evaluar a los estudiantes, determinar el alcance de los objetivos iniciales y el nivel de desempeño de cada uno, una vez que las tareas se hayan implementado.

Con esta unidad didáctica, buscamos que los estudiantes comprendan y apliquen el método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales 2×2 . Utilizamos el método gráfico como medio para resolver los problemas y situaciones propuestas, comprender la noción de sistema lineal de ecuaciones y modelar gráficamente situaciones no rutinarias.

Elaboramos las tareas para que sean implementadas con estudiantes de grado noveno de educación básica. Su diseño surgió de la necesidad de realizar aportes al alcance del estándar curricular “Identifica diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales” (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006, p. 87).

1.1 Objetivos de aprendizaje

Con la unidad didáctica pretendemos proporcionar oportunidades para que los estudiantes

1. apliquen el método gráfico para obtener puntos de corte entre rectas como solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas;
2. comprendan la noción de solución de un sistema lineal, al relacionar la existencia de una única solución, infinitas soluciones o ninguna solución con la posición relativa de las rectas en el plano; y
3. modelen gráficamente situaciones no rutinarias mediante sistemas de ecuaciones lineales y establezcan la relación funcional entre variables.

1.2 Esquema general de la unidad didáctica

La secuencia de actividades está compuesta por siete tareas para desarrollar en diez sesiones de 60 minutos cada una. En la figura 1, mostramos la estructura general de la secuencia de tareas por sesiones y asociamos cada objetivo de aprendizaje con las tareas. Además, mostramos las diferentes etapas, sesión a sesión, que se destinan para el trabajo con la tarea transversal. Llamamos a las tareas SR y SE de transición porque permiten dar continuidad al cambio entre objetivos de aprendizaje y relacionan las capacidades de un objetivo con el siguiente. Proponemos una tarea transversal que se desarrolla a lo largo de las diez sesiones. Esta tarea, titulada Gran premio de Brasil, abarca los tres objetivos propuestos y sugerimos que se aborde dedicando un tiempo aproximado de diez minutos en cada sesión. La tarea transversal presenta una situación problema que permite enriquecer el avance de los estudiantes, la apropiación de los conceptos abordados y la valoración de los procesos matemáticos realizados. La secuencia de tareas comienza con una actividad diagnóstica, cuyo propósito es evidenciar las nociones previas de representación gráfica de ecuaciones lineales, y termina con la evaluación final que corresponde a la presentación de los resultados obtenidos en la solución de la tarea transversal.

Sesiones →	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
Objetivos →	(1) Aplicar			(2) Comprender			(3) Modelar			
Tareas →	FR		SE		RP	ER		BC	CO HE	GP
Partes de la tarea transversal →	Gran premio de Brasil									
	Motivación	p1/p2	p2	p2	p2/p3	p3	p3	p3	p3	p3

p1: Planteamiento, p2: Ejecución, p3: Resolución, FR: Figuras con tres rectas, SE: Sistemas equivalentes, RP: Rectas en el plano, ER: Encontrar rectas, BC: Bus y carro, CO: Copias, HE: Heladería, GP: Gran premio de Brasil.

Figura 1. Estructura general de la secuencia de tareas

El diseño está centrado en el desarrollo de las competencias del estudio PISA que se pueden relacionar con los procesos generales establecidos por el Ministerio de Educación en los *Estándares básicos de competencias* (MEN, 2006). Además, las tareas propuestas presentan situaciones en las que se requiere que el estudiante produzca un modelo matemático para cada situación; lo represente de diferentes maneras; realice traducciones entre el lenguaje natural, algebraico y gráfico; e interprete los resultados en los términos propios de la situación. En la tabla 1 presentamos las competencias a las cuales contribuye cada una de las tareas.

Tabla 1

Contribución de tareas al desarrollo de competencias

Tareas	Objetivos	Competencias Estudio PISA							
		PR	A	C	M	RP	R	LS	UH
Figuras con tres rectas	Aplicar						x		
Sistemas equivalentes		x	x	x				x	
Rectas en el plano	Comprender	x	x	x			x	x	
Encontrar rectas		x			x		x		
Bus y carro		x			x		x	x	x
Copias					x		x	x	x
Heladería	Modelar	x			x		x	x	x
Gran premio de Brasil		x			x	x	x	x	x

PR: Pensar y razonar, A: Argumentar, C: Comunicar, M: Modelar, RP: Plantear y resolver problemas, R: Representar, LS: Usar lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones, UH: Uso de herramientas y recursos.

1.3 Articulación con los contenidos

Teniendo en cuenta el estándar curricular seleccionado, los contenidos que se pueden abordar con la unidad didáctica están asociados a la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2 mediante el método gráfico. En el mapa conceptual de la figura 2, mostramos cuatro pilares para la organización de los conceptos implicados en este foco de contenido: las representaciones, los tipos de sistemas, la estructura semántica de los problemas y el método gráfico de solución.



1.4 Capacidades que se potencian en los estudiantes

Las capacidades hacen referencia a la actuación exitosa de un individuo frente a una tarea rutinaria. Representan acciones que el estudiante evidencia al momento de resolver las tareas poniendo en juego su conocimiento de unos contenidos concretos. De acuerdo con las tareas propuestas, las capacidades se agrupan en tres categorías: algebraicas, gráficas y transversales. En la tabla 2, presentamos el listado de capacidades organizadas en esas tres categorías. Las capacidades algebraicas hacen referencia a la manipulación de ecuaciones, a los procesos de despeje de variables o a algoritmos relacionados con ecuaciones lineales. Las de tipo gráfico se relacionan con la representación de puntos y rectas en el plano cartesiano a partir de ecuaciones lineales o a partir de datos en un enunciado y con la determinación de la posición relativa de rectas en el plano. Las capacidades de tipo transversal se relacionan con traducciones entre los diferentes sistemas de representación de una ecuación lineal o sistemas de ecuaciones lineales: de la forma numérica a la algebraica, de la algebraica a la gráfica y de las gráficas a la forma numérica.

Tabla 2

Listado de capacidades

C	Capacidad	C	Capacidad
Algebraicas			
C1	Pasar de un enunciado verbal a un sistema de ecuaciones lineales	C8	Sustituir valores numéricos en ecuaciones lineales
C2	Despejar incógnitas en una ecuación lineal	C9	Verificar que la solución satisfaga las ecuaciones del sistema lineal
C3	Hallar la pendiente de la recta que pasa por dos puntos	C10	Identificar los parámetros de una ecuación lineal o afín
C4	Determinar la ecuación de la recta dadas unas condiciones gráficas y/o algebraicas.	C11	Identificar qué ecuaciones corresponden a rectas lineales y cuales a rectas afines
C5	Hallar ecuaciones lineales equivalentes a otras dadas	C32	Identificar en la gráfica el punto de corte de una recta con los ejes
C6	Escribir un sistema de ecuaciones lineales en forma canónica	C33	Identificar en la gráfica la variación de la variable dependiente por cada unidad de la variable independiente
C7	Escribir un sistema de ecuaciones lineales en forma estándar		

Gráficas			
C12	Representar rectas en el plano conociendo dos o más puntos	C17	Emplear recursos gráficos para determinar el cambio de una recta al modificar los parámetros de la ecuación asociada
C13	Representar gráficamente ecuaciones lineales o afines conociendo la pendiente y un punto	C18	Determinar la posición relativa de dos rectas dadas sus pendientes utilizando recursos gráficos
C14	Representar ecuaciones lineales o afines a partir de parámetros identificados en la ecuación	C19	Ubicar en el plano cartesiano el punto solución de un sistema de ecuaciones lineales
C15	Determinar la posición relativa de dos rectas en el plano	C20	Hallar las coordenadas del punto intersección de dos rectas, si existe
C16	Usar recursos gráficos para representar rectas en el plano	C21	Identificar las coordenadas de puntos pertenecientes a una recta
Transversales			
C22	Identificar las variables que intervienen en una situación	C27	Relacionar las ecuaciones de un sistema con los datos del enunciado
C23	Elaborar e interpretar tablas de valores	C28	Identificar cuándo dos o más sistemas de ecuaciones son equivalentes
C24	Determinar si dos ecuaciones con dos incógnitas representan rectas paralelas, secantes o superpuestas	C29	Usar escalas numéricas para representar sistemas de ecuaciones lineales
C25	Determinar la solución de un sistema	C30	Identificar los parámetros de una función lineal dada su representación gráfica
C26	Relacionar la representación gráfica de una situación con los datos del enunciado	C31	Discriminar la información faltante para la resolución de un problema

1.5 Posibles errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Consideramos como limitaciones de aprendizaje aquellas dificultades y errores que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas. Una dificultad es un conocimiento parcial que el estudiante tiene sobre un tema y que lo induce a incurrir en errores cuando aborda tareas concretas. Tenemos en cuenta dos tipos de dificultades: las relacionadas con la complejidad de los objetos matemáticos y las relacionadas con los procesos propios del pensamiento matemático.

Entre las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, identificamos la dificultad para representar sistemas de ecuaciones lineales en el plano cartesiano y para establecer la solución de un sistema lineal a partir de expresiones algebraicas y/o representación de rectas en el plano. En cuanto a los procesos propios del pensamiento matemático, identificamos la dificultad para representar situaciones no rutinarias de sistemas de ecuaciones lineales y establecer las variables y la relación entre ellas. En la tabla 3, mostramos los posibles errores en los que pueden incurrir los estudiantes, organizados de acuerdo con las dificultades.

Tabla 3

Posibles errores en los que pueden incurrir los escolares

Cd	Error	Cd	Error
D1 Representar sistemas de ecuaciones lineales en el plano cartesiano			
E1	Confundir los parámetros de la ecuación de una recta en su forma estándar $y = mx + b$ para representarla sin hacer tabulación	E4	Ubicar en el plano puntos que no pertenecen a la misma recta (no colineales)
E2	Calcular parámetros usando fórmulas o reglas de procedimientos erróneas	E5	Ubicar el punto de corte de las dos rectas por encima del punto de corte de cada recta con el eje y
E3	Representar gráficamente todas las rectas cortando los ejes en (0,0)	E6	Utilizar escalas inapropiadas para solucionar sistemas de ecuaciones
D2 Establecer la solución de un sistema lineal			
E7	Relacionar incorrectamente el valor de las pendientes de dos rectas con su posición relativa en el plano	E12	Establecer relaciones incorrectas entre la posición relativa de las rectas y el número de soluciones del sistema
E8	Considerar que la igualdad en los coeficientes de las mismas variables implica la representación de rectas coincidentes	E13	Confundir en un par ordenado las ordenadas con las abscisas (implica obtener una solución intercambiada: x por y)
E9	Suponer que dos ecuaciones no son equivalentes si la una no es múltiplo entero de la otra	E20	Establecer relaciones incorrectas entre el punto de corte de las rectas y la solución del sistema
E10	Considerar que dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son: $m_1 = -m_2$ o $m_1 = \frac{1}{m_2}$	E21	Escribir expresiones que no concuerdan con la representación gráfica de una situación
E11	Escribir expresiones que no tienen concordancia con las relaciones implícitas entre las variables en una situación	E22	Establecer relaciones incorrectas entre la representación gráfica y los datos de un enunciado
D3 Representar situaciones no rutinarias			
E14	Reducir un problema de dos variables a una sola variable	E17	Suponer que las rectas que representan móviles que parten de un mismo lugar deben partir del mismo punto en el plano
E15	Despejar variables ignorando la jerarquía de las operaciones (implica obtener ecuaciones no equivalentes)	E18	Ubicar en el eje de las ordenadas la variable independiente
E16	Igualar todas las ecuaciones lineales a cero	E19	Solucionar un sistema de ecuaciones hallando el valor de una sola variable

2 Tareas e implementación de la cartilla

Proponemos que la tarea diagnóstica (TD), con la que inicia la secuencia de tareas, sea desarrollada individualmente por los estudiantes y las demás tareas

se trabajen en parejas. A continuación, describimos cada una de las tareas, damos sugerencias metodológicas y presentamos el material fotocopiable. La descripción contiene las metas de la tarea, los recursos que se pueden utilizar, el agrupamiento de los estudiantes y los conceptos abordados. Las sugerencias metodológicas incluyen aclaraciones de la tarea, las capacidades que se espera que los estudiantes activen en el momento de resolverla, los posibles caminos de aprendizaje que pueden seguir los estudiantes al abordar la tarea, los errores en los cuales pueden incurrir, y las actuaciones o interacciones que el profesor puede propiciar para promover el aprendizaje de los conceptos y procedimientos abordados. El material fotocopiable contiene las actividades, ejercicios o acciones para ser desarrollados en forma grupal o individual según las indicaciones dadas en cada descripción.

Como complemento a lo anterior, esperamos que, en cada una de las sesiones de clase, el profesor asuma roles específicos para determinados momentos. Sugerimos, por ejemplo, que guíe a los estudiantes en el desarrollo de las tareas; que observe y genere preguntas orientadoras en la construcción del conocimiento matemático; que valide los procesos de los estudiantes; y que permita espacios de participación constante para compartir los desarrollos propuestos en los diferentes grupos de trabajo. La mayoría de las tareas pueden desarrollarse en cinco partes: (a) organización de los estudiantes, (b) solución de la tarea, (c) presentación de dos grupos de trabajo, (d) discusión y (e) corrección de procesos. En la figura 3, presentamos un esquema de los roles sugeridos al profesor en cada una de las partes antes mencionadas.

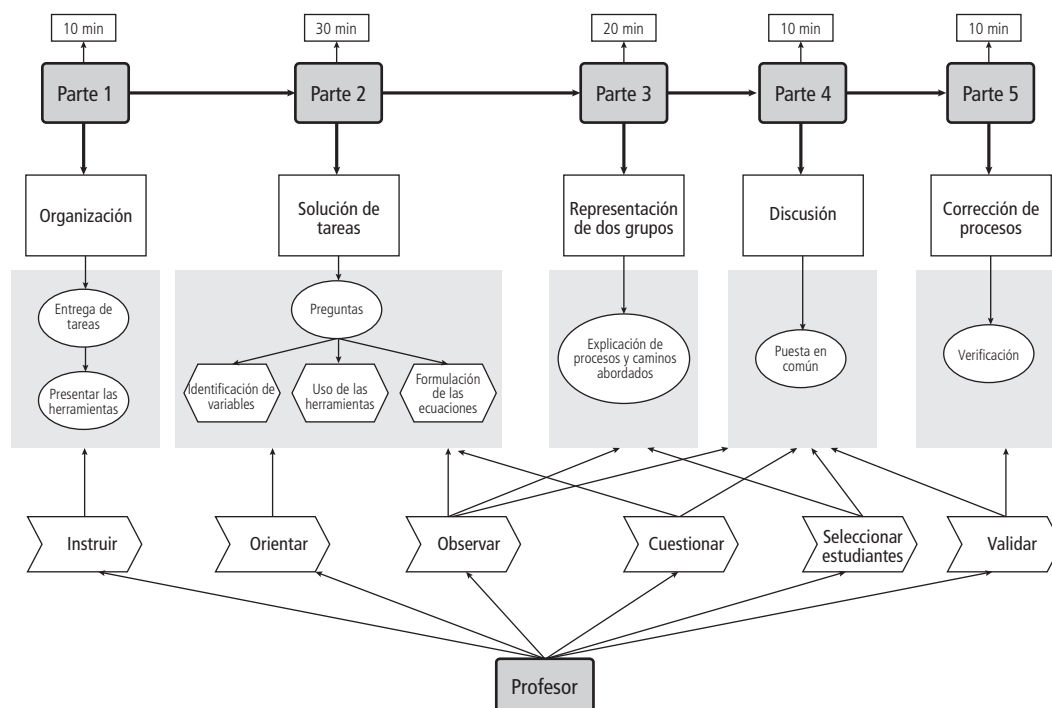


Figura 3. Roles del profesor

En el apartado de descripción de las tareas y sugerencias metodológicas, mostramos los componentes que describen cada tarea. Para ello, describimos metas, recursos, agrupamiento de los estudiantes y conceptos abordados en la sesión de clase. Después de la descripción, presentamos las sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea, y culminamos con las indicaciones para la evaluación de los estudiantes.

3 Tarea diagnóstica: Figuras con tres rectas (TD). Sesiones 1 y 2

La secuencia de tareas comienza con la actividad diagnóstica. Esta tarea se compone de tres ejercicios donde los estudiantes deben representar ternas de rectas en el plano cartesiano, dadas las ecuaciones que las definen. Con esta actividad, queremos identificar las habilidades de los estudiantes relacionadas con el manejo de las ecuaciones lineales y su representación en el plano cartesiano.

3.1 Descripción de la tarea

Para describir la tarea, establecemos sus metas, los conceptos y procedimientos que aborda, los materiales y recursos que implica y el tipo de agrupamiento de los escolares.

Metas. La tarea tiene dos metas: (a) evidenciar en los estudiantes las capacidades relacionadas con la manipulación de ecuaciones y la representación gráfica de las mismas, y (b) analizar los resultados para conformar las parejas de estudiantes que trabajarán en las sesiones posteriores.

Conceptos y procedimientos abordados. La tarea aborda los siguientes conceptos y procedimientos: función afín, representación algebraica de las ecuaciones lineales, parámetros de una recta y representación gráfica en el plano cartesiano.

Sistemas de representación que se activan. La tarea motiva la activación del sistema de representación simbólico al inducir el trabajo con ecuaciones lineales que permiten identificar los parámetros de las rectas presentadas en la tarea. Los estudiantes activan el sistema de representación gráfico cuando utilizan el plano cartesiano para graficar las rectas. Finalmente, activan el sistema de representación numérico cuando identifican las coordenadas de los puntos en los cuales se cruzan las rectas.

Materiales y recursos. Se utilizan los siguientes materiales y recursos: material fotocopiable, lápiz, borrador y regla. No hay restricción para el uso de calculadoras.

Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas. Los escolares trabajarán de manera individual en la primera sesión. En la segunda sesión, el profesor puede promover espacios de participación de los estudiantes para identificar las dificultades que han tenido al resolver la tarea y posteriormente hacer una introducción al tema.

3.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Antes de implementar la tarea diagnóstica, es necesario que el profesor haya trabajado la representación gráfica de funciones lineales y afines, ya que la tarea requiere que el estudiante identifique la variable x como variable independiente y exprese este tipo de ecuaciones en la forma $y = mx + b$. El tiempo estimado para resolver la tarea es de 50 minutos, distribuido de la siguiente forma.

1. Distribución del material, lectura y explicación de la tarea: 5 minutos.
2. Desarrollo de la tarea: 35 minutos.
3. Socialización de los resultados: 10 minutos.

El profesor puede dedicar la segunda sesión a la realimentación de la tarea y refuerzo de los conceptos y procedimientos abordados.

3.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

Los estudiantes pueden activar todas o algunas de las siguientes capacidades: C10, C11, C12, C13, C14, C20, C21, C23, C32 y C33 (ver tabla 2). En el contexto de la función afín, la tarea plantea el manejo de capacidades relacionadas con la ubicación de parejas ordenadas en el plano cartesiano, la determinación de puntos de una recta, la interpretación de los parámetros de la ecuación correspondiente y la identificación del punto de corte de dos rectas. En relación con la representación estándar, la tarea propone el despeje de variables y la identificación de la variable independiente. Por otra parte, la tarea también requiere que el estudiante

- identifique al menos un par de puntos pertenecientes a cada recta;
- asocie los parámetros de una ecuación con su correspondiente gráfica; y
- determine el punto de corte de dos rectas en el plano.

Se entiende como camino de aprendizaje de una tarea la secuencia de capacidades que pueden activar los estudiantes al abordarla. Los caminos de aprendizaje sirven como referente para que el profesor prevea las acciones que los estudiantes pueden realizar al enfrentar una tarea y los errores en los que pueden incurrir. Dos posibles caminos de aprendizaje que pueden seguir los estudiantes al resolver la tarea diagnóstica son los siguientes.



3.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Las principales dudas de los estudiantes surgen alrededor de las tres preguntas posteriores a la representación de las rectas. Por ejemplo, a la pregunta ¿qué figura se forma?, sugerimos que el maestro les indique que encontrarán figuras conformadas solo con tres rectas —como triángulos, figuras en forma de H, o, en su defecto, tres rectas paralelas—. A la pregunta ¿por qué se forma esta figura?, el profesor debe solicitar al estudiante que busque la justificación en los parámetros de las ecuaciones, o en los valores asignados a la variable x , o a los signos y operadores dentro de cada ecuación. Para la pregunta ¿cuáles son las coordenadas donde se intersectan los puntos de las rectas?, el profesor debe indicar al estudiante que busque una aproximación de los puntos, o, en el caso de identificarse fácilmente, el punto exacto.

3.5 Ayudas para el profesor

Se pueden identificar tres momentos clave para realizar preguntas a los estudiantes: (a) una vez que los estudiantes elaboren las tablas; (b) cuando tracen líneas curvas en el plano; y (c) cuando presenten justificaciones como “porque sí”, o, “no sé por qué se forma esta figura”. En estos momentos, es oportuno que el docente realice las siguientes preguntas, bien sea de manera particular o de manera general.

- ¿Cuál es el menor número de puntos que se necesitan para trazar una recta?
- ¿Todos los puntos deben ser colineales?
- Si varían los parámetros m o b en la ecuación $y = mx + b$, ¿cómo varía la gráfica?
- ¿De qué depende que dos rectas se intersecten?

3.6 Evaluación

Debido a que esta tarea corresponde al diagnóstico, esperamos que el profesor se concentre en observar en qué medida los estudiantes activan las siguientes secuencias de capacidades al resolver la tarea: (a) representar rectas en el plano a partir de dos puntos, de la pendiente de la recta y un punto, o de los parámetros de su ecuación; (b) hallar las coordenadas del punto de intersección entre dos rectas; y (c) identificar el punto de intersección de dos rectas como la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Al observar la activación de las secuencias de capacidades mencionadas en el apartado anterior, el profesor podrá determinar criterios de conformación de parejas de trabajo para solucionar el resto de tareas de la unidad didáctica. Se espera que el profesor conforme los grupos de modo que, un estudiante aventajado trabaje con un estudiante que demuestre dificultades y así propiciar aprendizaje colaborativo en parejas heterogéneas.

3.7 Material fotocopiable

En los puntos 1 a 3, representa las rectas en un mismo plano y responde las siguientes preguntas.

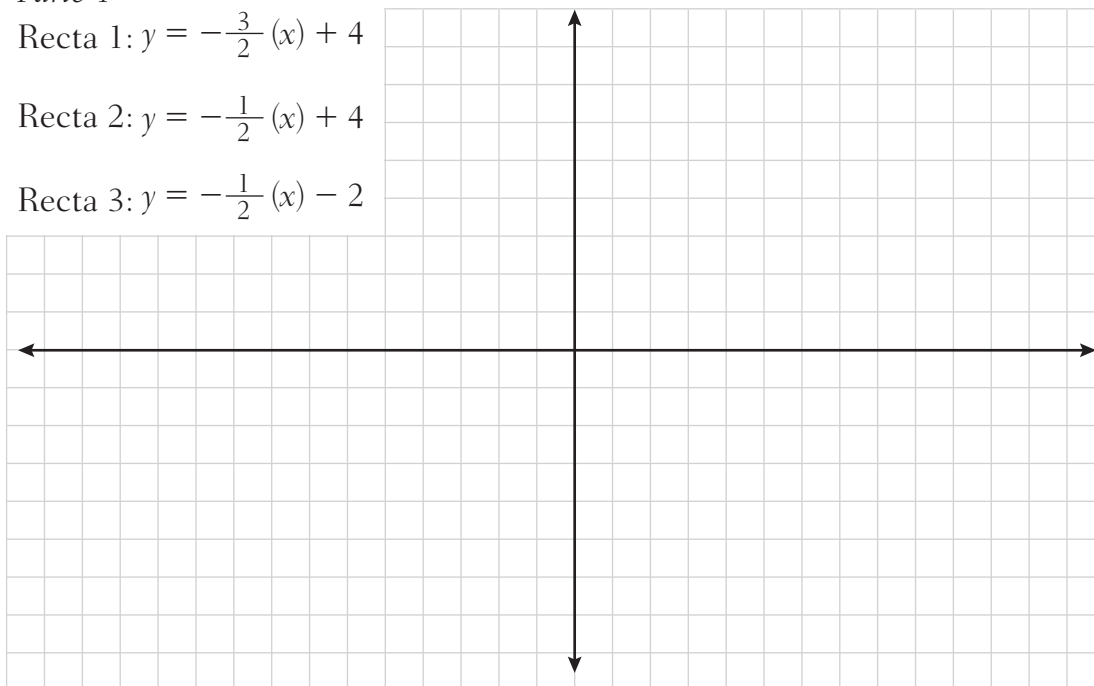
- ¿Qué figura se forma?
- ¿Por qué se forma esa figura?
- ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos donde se intersectan las rectas?

Parte 1

Recta 1: $y = -\frac{3}{2}(x) + 4$

Recta 2: $y = -\frac{1}{2}(x) + 4$

Recta 3: $y = -\frac{1}{2}(x) - 2$

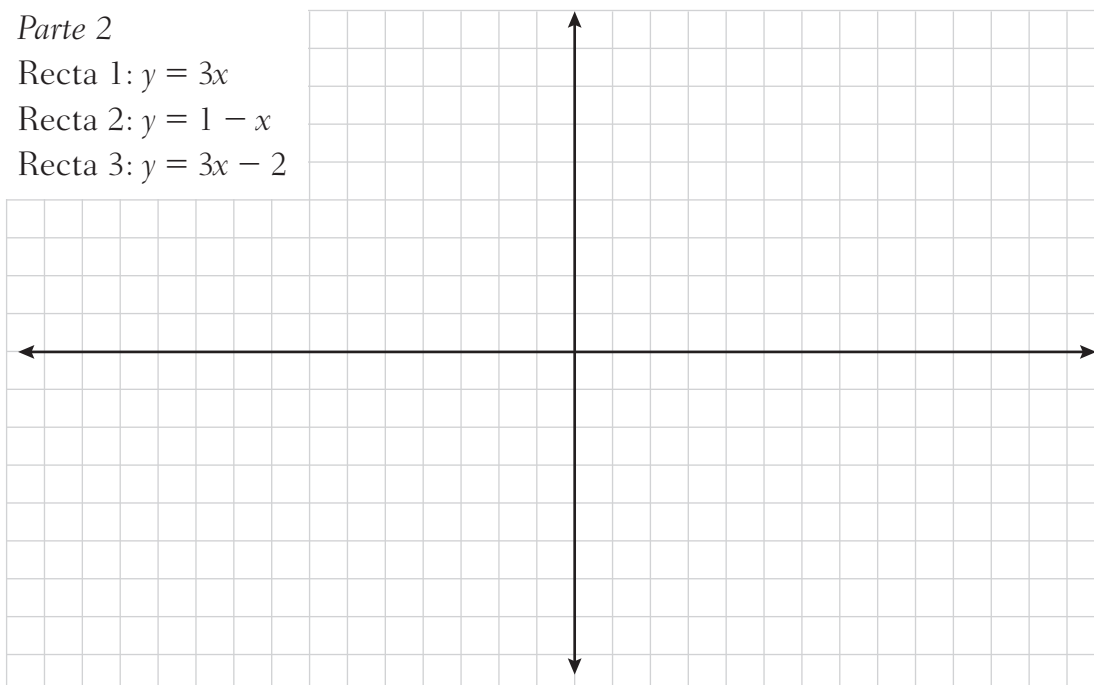


Parte 2

Recta 1: $y = 3x$

Recta 2: $y = 1 - x$

Recta 3: $y = 3x - 2$

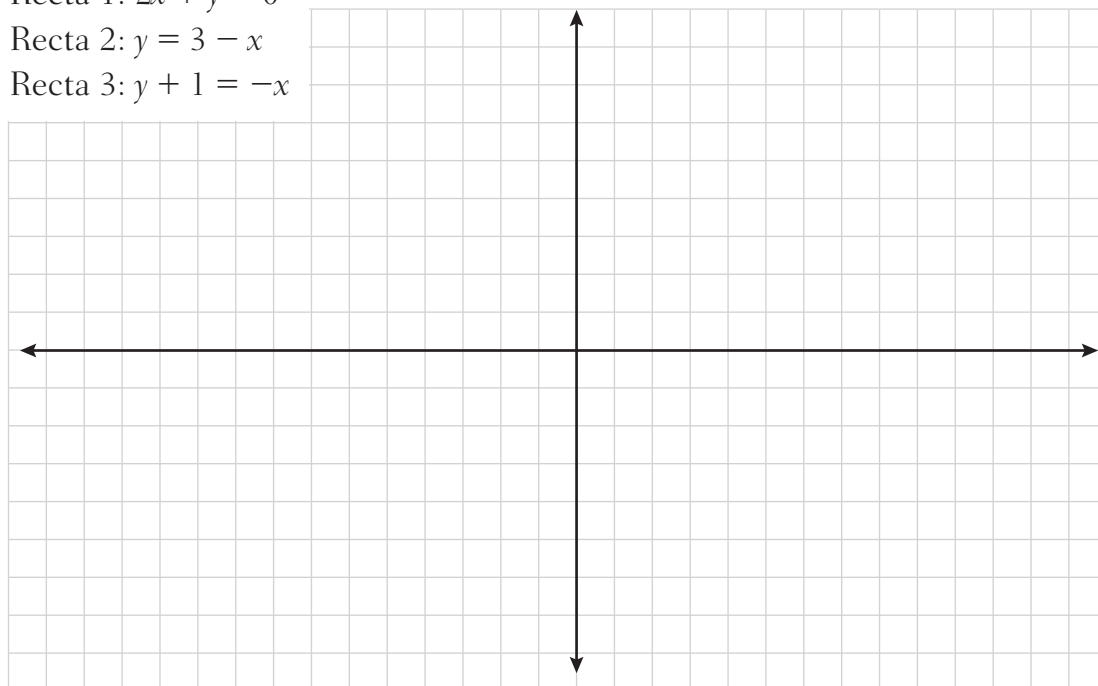


Parte 3

Recta 1: $2x + y = 0$

Recta 2: $y = 3 - x$

Recta 3: $y + 1 = -x$



4 Tarea 1: Sistemas equivalentes (T1). Sesiones 3 y 4

Esta tarea presenta una situación matemática en la que los estudiantes deben representar tres sistemas de ecuaciones lineales e identificar cuáles de ellos tienen la misma solución. Además, la tarea tiene como objetivo reconocer y construir sistemas de ecuaciones lineales equivalentes.

4.1 Descripción de la tarea

A continuación, presentamos las metas, los conceptos y procedimientos que esta tarea aborda, los materiales y recursos que implica y el tipo de agrupamiento de los escolares.

Metas. La tarea es de transición entre objetivos. Por tanto, contribuye a fortalecer el proceso de aplicar el método gráfico para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales y comprender si existe o no una solución esperada.

Conceptos y procedimientos abordados. La tarea aborda los siguientes conceptos y procedimientos: sistema de ecuaciones lineales, punto de corte entre rectas, sistemas equivalentes y parámetros de una recta.

Sistemas de representación que se activan. En la tarea, se proporciona la representación simbólica de tres sistemas de ecuaciones lineales para determinar sus respectivas representaciones gráficas. Es necesario expresar verbal o numéricamente la propiedad que hace que dos sistemas de ecuaciones lineales sean equivalentes e identificar los parámetros que se deben modificar para que todos los sistemas sean equivalentes. Sugerimos que los estudiantes utilicen los sistemas de representación gráfico y simbólico para resolver la última parte de la tarea.

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea corresponde a una situación científica, dentro de la matemática.

Materiales y recursos. Para resolver la tarea, se utiliza papel, lápiz, regla y fotocopia de la tarea. No hay restricción para el uso de calculadoras.

Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas. Los estudiantes trabajan en las parejas conformadas por el profesor al finalizar la tarea diagnóstica. El profesor presenta la tarea y da las instrucciones previas a su desarrollo. Sugerimos que el profesor pida a los estudiantes representar cada sistema de ecuaciones en un plano diferente. En la medida que surjan preguntas relacionadas con las instrucciones propias de la tarea, esperamos que el profesor oriente a los estudiantes sin solucionarles la actividad propuesta.

4.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

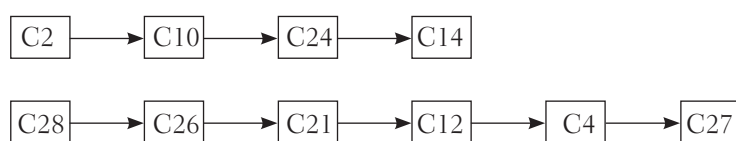
La tarea requiere de toda una sesión de clase para su desarrollo. Durante este tiempo, se espera que cada pareja de estudiantes grafique todos los sistemas de ecuaciones propuestos y proponga las modificaciones que considere necesarias al tercer sistema (ver la tarea más adelante). Luego de terminar la primera sesión de 60 minutos, se sugiere que el profesor recoja todos los trabajos y elija tres de ellos para ser expuestos en la siguiente sesión. La segunda sesión estará enfocada a la presentación de los trabajos elegidos. Los demás estudiantes deben comentar si encuentran errores en los procesos de los compañeros que exponen y/o proponer nuevas estrategias para solucionar la tarea. El profesor debe incentivar la participación activa de sus estudiantes. La discusión debe permitirles verificar si su trabajo es correcto o necesita modificaciones, y comprender el concepto de sistemas equivalentes. Al finalizar las presentaciones y la discusión, se debe asignar tiempo de la clase para que todas las parejas corrijan sus producciones, en caso de necesitarlo.

4.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

Los estudiantes pueden activar todas o algunas de las siguientes capacidades:

C2, C4, C10, C12, C21, C24, C26, C27 y C28 (ver tabla 2). Los sistemas de ecuaciones A y B se pueden representar a partir de la identificación de los parámetros en las ecuaciones dadas o al tabular. El sistema de ecuaciones C requiere del despeje de variables para poder utilizar alguno de los procesos anteriores. Adicionalmente, se requiere que los estudiantes relacionen los datos y el lenguaje utilizado en el enunciado con las representaciones gráficas de cada sistema. Ellos deben identificar que la segunda recta del sistema C se debe modificar para que los tres sistemas sean equivalentes.

Dos posibles caminos de aprendizaje que pueden seguir los estudiantes al resolver la tarea Sistemas equivalentes son los siguientes.



4.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

En esta tarea, pueden surgir dudas relacionadas con el despeje de variables y con la identificación de parámetros de una recta, dada su ecuación. La pregunta ¿qué propiedad gráfica cumplen?, en la segunda parte de la tarea, puede generar dudas en los estudiantes. Por tanto, debe ser orientada hacia el reconocimiento de las similitudes y diferencias en la representación gráfica de cada sistema de ecuaciones. Los estudiantes pueden incurrir en cualquiera de los siguientes errores: E4, E7, E11, E13, E15 y E21 (ver tabla 3). En cualquiera de estos casos, el profesor puede guiar a los estudiantes, al recordar conceptos y procedimientos previos que se relacionen con el despeje de variables, la representación de rectas en el plano o la identificación de posiciones relativas entre dos rectas.

4.5 Ayudas para el profesor

El profesor puede orientar o realizar preguntas a los estudiantes cada vez que observe en ellos alguna de las siguientes acciones: (a) cuando se les dificulte determinar la solución de un sistema de ecuaciones en forma numérica; (b) cuando se les dificulte encontrar similitudes o diferencias entre las representaciones gráficas realizadas; y (c) cuando se les dificulte proponer estrategias o procesos de modificación para resolver la segunda parte de la tarea. En estos momentos, algunas de las preguntas que puede formular el profesor, bien sea de manera particular o de manera grupal, son las siguientes.

- ¿Qué valores numéricos en las ecuaciones nos dice cuál es la pendiente de la recta y cuál es su corte con el eje y ?
- Si varían los parámetros m o b en la ecuación $y = mx + b$, ¿cómo varía la gráfica?

- Si el punto de corte entre dos rectas no tiene coordenadas que correspondan a números enteros, ¿cómo podemos hacer una estimación o aproximación de esas coordenadas?
- ¿Qué condición deben cumplir dos sistemas de ecuaciones lineales para que sean equivalentes?

4.6 Evaluación

Es posible determinar si la meta de la tarea se ha alcanzado cuando los estudiantes evidencian las siguientes acciones.

- Representan gráficamente sistemas de ecuaciones lineales y determinan si tienen o no soluciones.
- Identifican la posición relativa de rectas en el plano.
- Reconocen cuándo dos o más sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes.
- Identifican qué parámetros deben modificarse para que una recta sea secante a otra en un punto determinado.

4.7 Material fotocopiable

Representa cada uno de los siguientes sistemas en un plano y responde las preguntas.

Sistema A: $y = x - 1$

$$y = -x - 3$$

Sistema B: $y = 3x + 1$

$$y = 0,5x - 1,5$$

Sistema C: $3y = x - 5$

$$y = x - 3$$

- ¿Cuáles son las gráficas que representan cada sistema?
- Si los sistemas A y B son equivalentes, ¿qué propiedad gráfica cumplen?
- ¿Qué se debe modificar en la ecuación y en la gráfica del sistema C para que los tres sean equivalentes? Explica tu respuesta.

5 Tarea 2: Rectas en el plano (T2).

Sesión 5

Rectas en el plano es una tarea de ejercitación en la que los estudiantes deben interpretar los enunciados dados para representar gráficamente tres sistemas de ecuaciones lineales y relacionar sus soluciones con las condiciones dadas. Tiene como objetivo dar la oportunidad a los estudiantes para que comprendan cuándo un sistema de ecuaciones lineales tiene única solución, infinitas soluciones o ninguna solución.

5.1 Descripción de la tarea

A continuación, presentamos las metas, los conceptos y procedimientos que esta tarea aborda, los materiales y recursos que implica y el tipo de agrupamiento de los escolares.

Metas. La tarea tiene como meta inducir a los estudiantes a la comprensión de la existencia de una única solución, infinitas soluciones o ninguna solución de un sistema de ecuaciones lineales, al relacionarlas con la posición relativa de las rectas en el plano. La tarea es de ejercitación y fortalece la construcción de nuevos significados y la aplicación de procesos y conceptos previos.

Conceptos y procedimientos abordados. La tarea aborda los siguientes conceptos y procedimientos: punto de corte entre rectas, forma estándar de una recta, representación gráfica de rectas, solución de un sistema de ecuaciones lineales y posición relativa de rectas.

Sistemas de representación que se activan. Al inicio de la tarea, los estudiantes deben identificar la representación simbólica de un sistema de ecuaciones lineales en un enunciado. Posteriormente, deben pasar a la representación gráfica de los sistemas dados para encontrar sus soluciones (si existen). Finalmente, deben indagar sobre la relación que existe entre las soluciones encontradas numérica o gráficamente y la posición relativa de las rectas en el plano.

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea se enmarca en una situación científica.

Materiales y recursos. Para resolver la tarea se utiliza papel, lápiz, regla y fotocopia de la tarea. No hay restricción para el uso de calculadoras.

Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas. Los estudiantes trabajan en parejas. El profesor presenta la tarea y da instrucciones sobre cómo graficar las rectas de cada parte de la tarea, a partir de las condiciones del enunciado. En este momento, se espera que el profesor presente un ejemplo y resuelva una parte del primer sistema de ecuaciones. Para ello, el profesor puede graficar la primera recta presentada en la tarea y sugerir a los estudiantes que representen cada sistema de ecuaciones en un plano cartesiano diferente. Las interacciones entre profesor y estudiantes pueden orientarse a la verificación de los procesos y a la identificación de errores mediante preguntas que los motiven a indagar sobre sus procesos y a corregir sus errores durante el proceso.

5.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

La solución de la tarea requiere un tiempo estimado de 55 minutos. El tiempo se puede distribuir de la siguiente manera.

Presentación (5 minutos). El profesor presenta la tarea y representa, como ejemplo, una de las rectas del primer punto.

Solución (30 minutos). Cada pareja de estudiantes representa los tres sistemas de ecuaciones lineales y responde todas las preguntas.

Socialización (20 minutos). El profesor recoge todas las producciones de sus estudiantes y elige intencionalmente a cuatro parejas para que cada una exponga a todo el grupo un literal de la tarea. Los estudiantes que no exponen deben hacer aportes para la superación de los errores encontrados o sugerir otras estrategias de solución. Se espera que el profesor incentive la participación de todos los estudiantes y propicie interacciones críticas frente al trabajo de quienes exponen.

5.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

Los estudiantes pueden activar todas o algunas de las siguientes capacidades: C4, C7, C10, C21, C24, C25 y C27 (ver tabla 2). Las ecuaciones que se pide graficar están presentadas de forma estándar. Por tanto, es posible que los estudiantes acudan a procesos de despeje de variables para transformarlas a su forma canónica, antes de graficarlas. Se espera que busquen estrategias que pongan en juego los conceptos y procesos aprendidos en sesiones anteriores. El siguiente es un posible camino que pueden seguir los estudiantes al resolver la tarea.



5.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Durante el desarrollo de la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores relacionados con procedimientos algebraicos para modificar ecuaciones lineales. Además, es posible que soliciten pautas para graficar las rectas sin necesidad de tabular. Por otra parte, es común que confundan los parámetros de las rectas, dadas las ecuaciones en forma estándar. Los errores en los que los estudiantes pueden incurrir son los siguientes: E1, E21, E11, E7, E10 y E8 (ver tabla 3). Debido a que esta tarea es de ejercitación, se espera que el profesor recuerde procedimientos previos, cada vez que surjan preguntas u observe que alguna pareja no avanza en el desarrollo de la tarea.

5.5 Ayudas para el profesor

Antes de realizar la socialización de los procedimientos de cuatro parejas de estudiantes, es recomendable que el profesor procure identificar tres tipos de

grupos: (a) los que desarrollan sin ayuda toda la tarea y la terminan al realizar los procesos previstos; (b) los que en ocasiones solicitan ayuda y preguntan aspectos relacionados con la representación de rectas en el plano; y (c) los que solicitan ayuda constantemente y no avanzan al ritmo esperado. Se sugiere que las parejas elegidas pertenezcan a las parejas a y b. De esta forma, es posible generar una discusión enriquecedora al socializar los resultados de los estudiantes. Es necesario que el profesor verifique constantemente los resultados de los estudiantes y reoriente sus procedimientos.

5.6 Evaluación

Es posible determinar si la meta de la tarea se ha alcanzado cuando los estudiantes evidencian las siguientes acciones.

- Representan gráficamente sistemas de ecuaciones lineales dadas las ecuaciones en forma estándar.
- Identifican la posición relativa de rectas en el plano.
- Relacionan la posición relativa de rectas en el plano con la existencia de una solución, infinitas soluciones o ninguna solución del sistema representado.

5.7 Material fotocopiable

a) Ubica en un plano pares ordenados (x, y) que cumplan las siguientes condiciones.

- $x + y = 2$ y traza la recta que los une.
- $x - y = 3$ y traza la recta que los une.

¿En qué punto se cortan las rectas? ¿Qué relación tiene el punto de corte de las dos rectas con las condiciones dadas?

b) Ubica en un plano pares ordenados (x, y) que cumplan las siguientes condiciones.

- $x + y = 5$ y traza la recta que los une.
- $2x + 2y = 10$ y traza la recta que los une.

¿En qué punto se cortan las rectas? ¿Qué relación tiene el punto de corte de las dos rectas con las condiciones dadas?

c) Ubica en un plano pares ordenados (x, y) que cumplan las siguientes condiciones.

- $x + y = 3$ y traza la recta que los une.
- $x + y = 6$ y traza la recta que los une.

¿En qué punto se cortan las rectas? ¿Qué relación tiene el punto de corte de las dos rectas con las condiciones dadas?

d) Establece la relación existente entre los sistemas de ecuaciones y sus respectivas representaciones gráficas.

6 Tarea 3: Encontrar Rectas (T3). Sesiones 6 y 7

El diseño de esta tarea involucra el uso del software Geogebra. Es una tarea de transición entre los objetivos dos y tres, en la que, dadas las coordenadas de un punto en el plano y una ecuación lineal, se pide construir nuevos sistemas de ecuaciones lineales que cumplan la condición de tener una solución específica. La tarea tiene como objetivo llevar a los estudiantes a la manipulación de rectas en el plano, para luego observar y encontrar nuevos sistemas equivalentes, al modelar la situación matemática que se presenta. El uso de Geogebra facilitará la manipulación de las rectas y permitirá a los estudiantes relacionar los sistemas de ecuaciones construidos para obtener resultados con un mayor nivel de precisión.

6.1 Descripción de la tarea

A continuación, presentamos las metas, los conceptos y procedimientos que esta tarea aborda, los materiales y recursos que implica y el tipo de agrupamiento de los escolares.

Metas. La meta de la tarea consiste en plantear sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, dado el punto solución, e identificar cuándo dos sistemas son equivalentes.

Conceptos y procedimientos abordados. Al resolver la tarea, los estudiantes pueden poner en juego los siguientes conceptos y procedimientos: pendiente de una recta, ecuación punto pendiente, gráficas de rectas dados dos puntos, método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales y sistemas equivalentes.

Sistemas de representación que se activan. El programa Geogebra permite relacionar de manera más efectiva los sistemas de representación simbólico, numérico, gráfico, verbal y ejecutable, ya que, dado un punto, se pueden construir diferentes rectas que pasan por él. Además, este programa permite, entre otras funcionalidades, determinar la pendiente de las rectas y las ecuaciones lineales en forma canónica, modificar las representaciones gráficas y simbólicas de un sistema de ecuaciones lineales, y obtener soluciones numéricas del intercepto de dos rectas en el plano cartesiano.

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea se ubica en una situación científica.

Materiales y recursos. La tarea implica el uso de Geogebra, papel, lápiz, tablero y fotocopia de la tarea. No existen restricciones para el uso de las herramientas que brinda el programa, pero sí se requiere que el profesor conozca previamente su uso.

Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas. Se espera que cada pareja de estudiantes pueda resolver la tarea en un computador o tableta que cuente con el software Geogebra instalado. Después de organizar a los estudiantes, el profesor presenta la tarea y les pide que representen rectas en el plano y exploren libremente las herramientas que ofrece el software. Luego de unos minutos de exploración libre, el profesor debe ejemplificar y guiar paso a paso la graficación de una recta a partir de su ecuación. Sugerimos ejemplificar con una recta diferente a las propuestas en la tarea. El profesor debe prever la posibilidad que los estudiantes no conozcan el uso del programa y que, por tanto, va a requerir dar instrucciones claras y precisas. Durante el desarrollo del ejemplo, es necesario que el profesor pregunte constantemente a todo el grupo si los resultados obtenidos son los que él espera y de asistencia a las parejas que muestren dificultades, para el uso correcto del software. Terminado el ejemplo, el profesor podrá pedir a los estudiantes que resuelvan la tarea.

6.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

La tarea está diseñada para dos sesiones de clase de 55 minutos cada una. La primera sesión se puede distribuir de la siguiente forma.

Presentación y exploración libre (10 minutos). El profesor presenta la tarea y permite a los estudiantes explorar libremente el software.

Ejemplificación (10 minutos). El profesor da las instrucciones a los estudiantes para graficar una recta en el plano de la que se conoce su ecuación en forma estándar y/o canónica. Cada pareja de estudiantes representa la recta y expresa sus dudas respecto al uso de Geogebra.

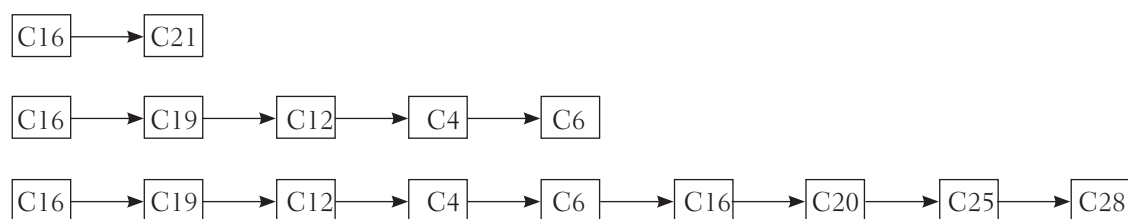
Solución (35 minutos). Cada pareja de estudiantes resuelve la tarea. El profesor debe elegir una manera de recolectar las producciones de sus estudiantes. Por ejemplo, puede pedirles que envíen sus trabajos a su correo electrónico. Además de los objetivos de carácter evaluativo, la intención de recolectar las producciones de los estudiantes es poder seleccionar intencionalmente al menos seis parejas para que expongan los resultados obtenidos en la siguiente sesión de clase.

La segunda sesión se dedicará a la presentación de las producciones de las seis parejas elegidas por el profesor. Sugerimos escoger parejas cuyos resultados o producciones sean diferentes para aprovechar la potencialidad de la tarea en términos de la multiplicidad de respuestas que se pueden obtener. El profesor puede identificar similitudes y diferencias en los trabajos de los estudiantes, y elegir parejas de acuerdo a diferencias encontradas. Durante esta sesión, se espera que el profesor genere una discusión que permita identificar los procedimientos

utilizados por todos y validar o refutar los argumentos y resultados obtenidos por quienes exponen.

6.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

Los estudiantes pueden activar todas o algunas de las siguientes capacidades: C4, C6, C12, C16, C19, C20, C21, C25 y C28 (ver tabla 2). Se espera que, luego de explorar las herramientas de Geogebra, los estudiantes determinen ecuaciones lineales que representen rectas que cumplan con las condiciones pedidas en la tarea. A partir del recurso gráfico que brinda el software, los estudiantes deben identificar coordenadas pertenecientes a una recta, proponer nuevas ecuaciones y representar y comparar sistemas de ecuaciones lineales equivalentes. Los siguientes son tres posibles caminos que se pueden seguir para resolver la tarea.



6.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Los estudiantes pueden tener dificultad para encontrar la ecuación de una recta que pase por el punto dado. Es posible que confundan los parámetros de las rectas mostrados en una ecuación lineal y que utilicen incorrectamente la ecuación punto pendiente. También, pueden suponer que todas las rectas deben pasar por el origen del plano. Ellos pueden incurrir en los siguientes errores: E3, E12, E13 y E19 (ver tabla 3). Aunque la tarea se trabaja en Geogebra, no se considera como error el uso incorrecto de las herramientas del programa. Por esa razón, es necesario que el profesor verifique constantemente las producciones de sus estudiantes durante todo el desarrollo de la tarea.

6.5 Ayudas para el profesor

Previamente a la implementación de la tarea, se sugiere que el profesor la resuelva con Geogebra y se familiarice con sus herramientas. El programa es tan solo un facilitador para representar las rectas pedidas y para comparar la solución de los diferentes sistemas de ecuaciones representados. Si no se cuenta con el programa, es posible adaptar la tarea para que sea resuelta en hojas milimetradas. Sin embargo, esto implica un mayor trabajo algebraico y gráfico en el que se activarán más capacidades de las previstas para la tarea. Es recomendable que el profesor maneje los tiempos en los que los estudiantes solucionan cada literal y

así pueda verificar si las producciones que ellos van realizando en cada momento cumplen o no con las expectativas de la tarea. Las preguntas que formule una pareja acerca del uso de Geogebra, pueden ser preguntas que otros estudiantes también tengan. Por tanto, también es aconsejable que esas preguntas se respondan dirigiéndose a todo el grupo y no particularizando a quienes preguntaron. La puesta en común y discusión se puede desarrollar como se ha hecho en tareas anteriores.

6.6 Evaluación

Se ha cumplido con la meta de la tarea si los estudiantes muestran procesos matemáticos que argumenten la solución a las preguntas planteadas. Por otra parte, los estudiantes pueden modelar la situación propuesta al proponer sistemas de ecuaciones lineales que cumplen la condición presentada en el enunciado. Deben desarrollar procesos en los que identifiquen parámetros de la(s) recta(s) que construyen, argumenten desde las matemáticas por qué se proponen esas rectas y además relacionen ecuaciones de diferentes sistemas para conformar nuevos sistemas de ecuaciones lineales equivalentes. Es posible que los estudiantes solucionen la tarea sin utilizar Geogebra. En tal caso, el profesor debe revisar y valorar los razonamientos y procesos implementados.

6.7 Material fotocopiable

Las dos rectas que se obtienen al representar gráficamente las dos ecuaciones de un sistema se cortan en el punto $(1, -2)$.

Haciendo uso de Geogebra, resolver las siguientes cuestiones.

- Si la recta cuya ecuación es $x + 2y = -3$ es una de las rectas representadas, determina cuál puede ser la ecuación de la otra recta.
- Representa dos sistemas de ecuaciones lineales (dos pares de rectas) que se intersecten en $(-3, -4)$. Completa las siguientes tablas con las ecuaciones de cada sistema.

Sistema de ecuaciones <i>a</i>	
Ecuación 1	
Ecuación 2	
Sistema de ecuaciones <i>b</i>	
Ecuación 3	
Ecuación 4	

- ¿Las ecuaciones 1 y 3 forman un sistema equivalente a las ecuaciones 2 y 4? Explica la respuesta.

7 Tarea 4: Bus y Carro (T4).

Sesión 8

Esta tarea invita a modelar, mediante sistemas de ecuaciones lineales, una situación en la que dos móviles, un bus y un carro, se desplazan en línea recta a velocidades constantes. En la tarea, se presentan tres situaciones distintas en las que se modifican las condiciones de posición y tiempo de partida de cada móvil. Se pide a los estudiantes determinar la distancia o tiempo transcurrido cuando un móvil alcanza o se cruza con el otro. Para resolver la tarea, es necesario utilizar la superposición de dos acetatos que contienen la representación gráfica de los desplazamientos del bus y del carro. El uso de este material se explica en las ayudas para el profesor.

7.1 Descripción de la tarea

A continuación, presentamos las metas, los conceptos y procedimientos que esta tarea aborda, los materiales y recursos que implica y el tipo de agrupamiento de los escolares.

Metas. Las metas de la tarea son modelar una situación de velocidad con sistemas de ecuaciones lineales y hallar el punto de encuentro de dos móviles.

Conceptos y procedimientos abordados. Durante la solución de la tarea, se abordan los siguientes contenidos: representación gráfica de rectas en el plano, punto de corte de una recta con los dos ejes, método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales, desplazamiento, velocidad constante y función afín.

Sistemas de representación que se activan. El trabajo con los acetatos permite manipular la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales y ayuda a observar los parámetros que condicionan la solución del sistema construido. El movimiento de los acetatos permite a los estudiantes observar los ejes de cada plano y determinar numéricamente la distancia y tiempo transcurrido por cada móvil.

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea muestra una situación pública de desplazamiento de dos móviles, modelable a partir de la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables (tiempo y distancia recorrida).

Materiales y recursos. El material que se utiliza en esta tarea contiene la representación gráfica, en acetatos, del desplazamiento de dos móviles. Los acetatos permiten superponer las rectas, observar el sistema de ecuaciones lineales que se forma, encontrar su solución y comparar la distancia que han recorrido el bus y el carro en un tiempo específico. Además de los acetatos, se utiliza papel, lápiz y tablero.

Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas. Cada pareja contará con dos acetatos. El primero tiene la representación gráfica del desplazamiento del bus y el segundo la representación gráfica del desplazamiento del carro (ver material fotocopiable). El profesor entrega el material a los estudiantes. Luego, para presentar la tarea, el profesor expone únicamente el contexto en que esta se sitúa. Explica a todo el grupo las variables implicadas en la situación y hace énfasis en la representación gráfica de distancia versus tiempo de cada móvil. Posteriormente, presenta el literal (a) de la tarea para que sea resuelto por los estudiantes. Es recomendable presentar los literales (b) y (c) cuando hayan terminado el literal (a). Es necesario que el profesor mantenga interacciones continuas con todas las parejas de trabajo para orientar la solución de la tarea y constatar el uso correcto del material. Al finalizar la solución de la tarea, se espera que el profesor realice una socialización de resultados. Para ello, se sugiere que elija parejas que presenten cada literal y promueva una discusión, como se ha hecho en sesiones de clase anteriores.

7.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Se sugiere distribuir la sesión de clase en los siguientes momentos.

Presentación del contexto y exploración libre del material (5 minutos). El profesor presenta el contexto de la tarea, entrega el material y permite a los estudiantes explorar los acetatos. Además, muestra las variables implicadas en las representaciones (distancia y tiempo).

Solución del literal (a) (15 minutos). El profesor orienta la solución de la primera parte de la tarea y pregunta constantemente a los estudiantes por los métodos y argumentos que ellos utilizan con los acetatos en la solución del literal (a). Comparte las soluciones correctas con todo el grupo y los induce, mediante preguntas, a relacionar la pendiente de cada recta con la velocidad de los móviles.

Solución de los literales (b) y (c) (20 minutos). Cada pareja de estudiantes resuelve el resto de la tarea. El profesor verifica sus procedimientos y resuelve sus inquietudes.

Puesta en común (15 minutos). El profesor elige tres parejas para que muestren a todo el grupo sus resultados y guía la discusión en la que se verifican y corrigen los procedimientos de todos los estudiantes.

7.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

Los estudiantes pueden activar todas o algunas de las siguientes capacidades: C19, C20, C32 C33 (ver tabla 2). Además, pueden identificar en el sistema de

ecuaciones representado, el punto solución del sistema, los puntos de corte de las rectas con los ejes y la relación que existe entre los valores observados y los datos del enunciado.

Un posible camino que pueden seguir los estudiantes al resolver la tarea es el siguiente.



7.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Los estudiantes pueden manifestar dificultades asociadas a la interpretación de las variables dadas en el enunciado con su respectiva representación gráfica. Es posible que solucionen parcialmente cada parte de la tarea y se limiten a presentar resultados donde se muestre únicamente el tiempo transcurrido o la distancia recorrida por el bus y el carro. Por otra parte, los estudiantes pueden incurrir en errores al leer incorrectamente los valores numéricos que determinan la solución del sistema. También, pueden tener en cuenta solamente el plano que está superpuesto a otro (el que está encima) y dar la solución al problema con las coordenada que allí se observan. Los estudiantes pueden incurrir en los siguientes errores: E14, E19, E20 (ver tabla 3).

7.5 Ayudas para el profesor

El material permite recrear la situación de movimiento respecto a la distancia o al tiempo, y hallar el punto de encuentro de los móviles gráficamente, al realizar desplazamientos sobre los ejes, rotaciones, traslaciones y reflexiones de los acetatos. A continuación, presentamos la solución de los tres literales de la tarea con el uso del material. Para ello, es necesario tener en cuenta que en la situación existen dos móviles que se desplazan a velocidades constantes diferentes: un bus a 30 km/h y un carro a 50 km/h.

Solución del literal (a). La situación presenta tres condiciones: (a) el bus comienza su desplazamiento desde un paradero; (b) el carro inicia su recorrido desde el mismo paradero, cuando el bus lleva 40 kilómetros recorridos; y (c) el carro se desplaza en la misma dirección que el bus. En esta primera parte, la tarea consiste en hallar el tiempo que tarda el carro en alcanzar al bus y determinar qué distancia ha recorrido cada móvil cuando esto sucede. La solución se puede representar ubicando el acetato del desplazamiento del carro sobre el acetato del desplazamiento del bus, haciendo coincidir el origen del plano del primero con el valor $y = 40$ km del segundo. Los ejes y de cada gráfica deben coincidir. Por tanto, los ejes x serán paralelos. En la figura 4, presentamos la solución.

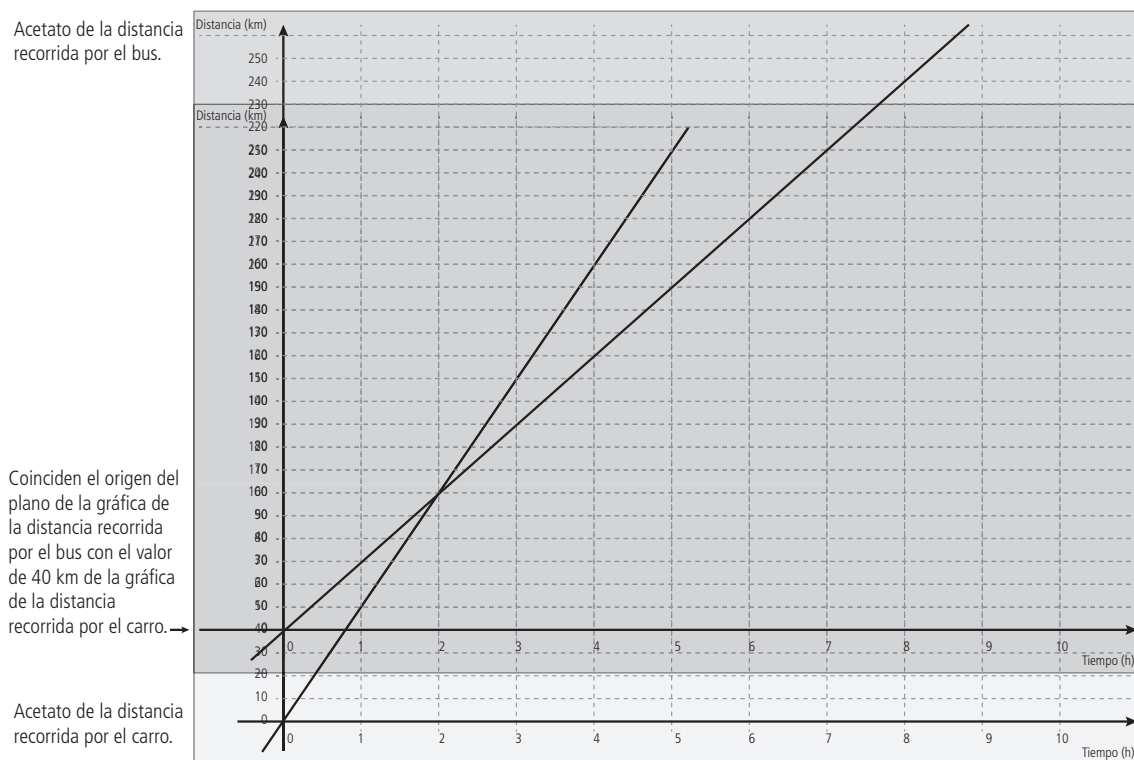


Figura 4. Solución del literal (a)

En la figura, se puede observar que las rectas se cruzan cuando el carro y el bus han recorrido 100 y 60 kilómetros, respectivamente. Al interpretar las gráficas de forma similar, se puede observar que el tiempo transcurrido cuando el carro sobrepasa al bus es de dos horas.

Se espera que los estudiantes encuentren el punto solución del sistema de ecuaciones e interpreten las coordenadas de ese punto, al hacer una lectura separada de cada plano cartesiano, ya que la distancia recorrida por cada móvil es diferente. El profesor debe encaminarlos a esa interpretación mediante preguntas reflexivas que lleven a la lectura separada de los planos.

Solución del literal (b). La segunda parte presenta las siguientes tres condiciones: (a) el bus sale del paradero a las 7 a. m.; (b) el carro sale desde el mismo punto a las 10 a. m.; y (c) el carro se desplaza en la misma dirección que el bus. Se supone que el bus y el carro se desplazan en línea recta y con velocidades constantes. En la tarea se pide determinar a qué distancia del paradero se encuentran cuando el carro sobrepasa al bus y se solicita hallar la hora en que se encuentran los dos móviles. La solución se puede encontrar ubicando el acetato de la gráfica de la distancia recorrida por el carro, sobre el acetato de la gráfica de desplazamiento del bus y haciendo coincidir los ejes x de tal forma que el origen del plano del primero esté ubicado sobre el valor de 3 horas del segundo. En la figura 5, mostramos la solución.

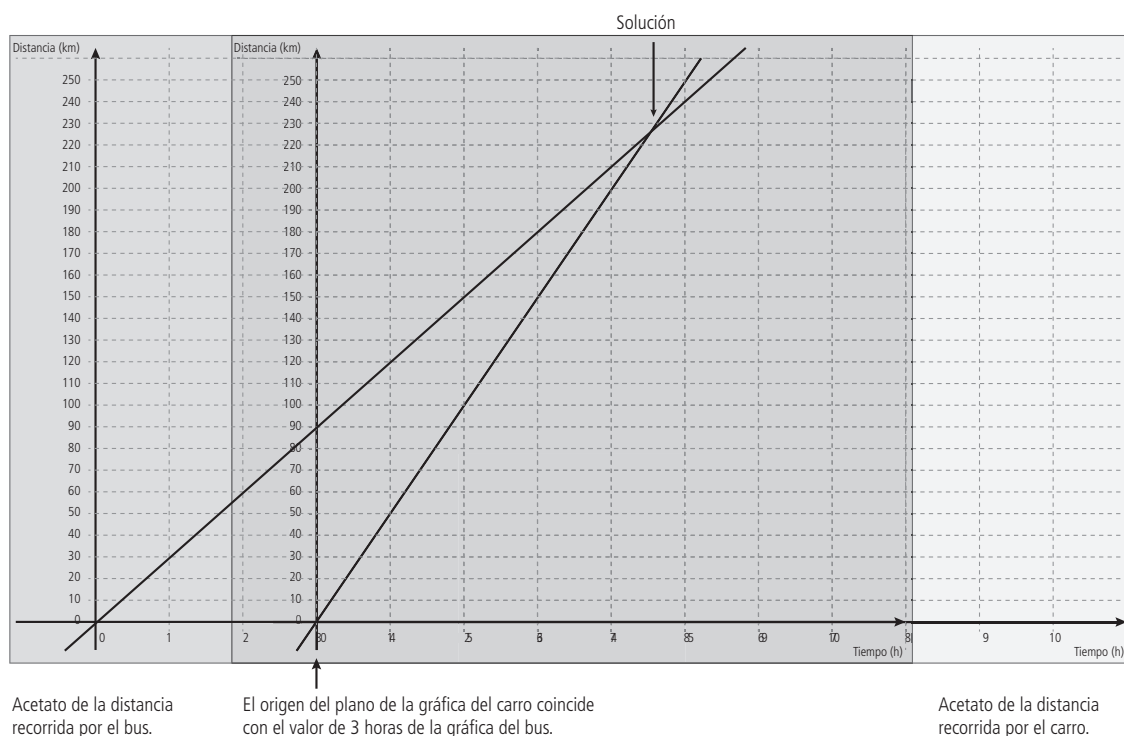


Figura 5. Solución literal (b)

La situación plantea una variación en la hora de partida de cada móvil. Como el bus parte a las 7 a. m. y el carro a las 10 a. m., se espera que los estudiantes tengan en cuenta la diferencia de tres horas para modelar la situación y hagan el respectivo movimiento sobre el eje x para representar el sistema de ecuaciones lineales. El profesor debe orientar la interpretación de la solución, al permitir a los estudiantes realizar estimaciones de los valores para determinar la hora de encuentro entre los móviles y la distancia recorrida por cada uno. La gráfica no muestra valores exactos en las coordenadas del punto solución. El profesor puede orientar el trabajo de los estudiantes al realizar preguntas como las siguientes.

- Si el carro parte a las 10 a. m., ¿cómo afecta la diferencia de horas a la gráfica del sistema de ecuaciones?
- ¿Los dos móviles parten del mismo punto?, ¿cómo condiciona esto a la gráfica?
- ¿Qué condiciones permiten que un móvil alcance al otro?

Solución del literal (c). La tercera y última parte de la tarea presenta los siguientes condiciones y datos: (a) el bus parte del paradero y el carro parte de la pista; (b) la distancia que separa el paradero de la pista es 200 kilómetros; (c) ambos vehículos parten a la misma hora; y (d) el bus se dirige hacia la pista y el carro hacia el paradero. Suponiendo las mismas condiciones de movimiento rectilíneo uniforme como en los literales anteriores, se pide a los estudiantes determinar

la distancia que han recorrido los dos móviles cuando se cruzan por el camino. La solución requiere que los estudiantes interpreten que el desplazamiento se hace en direcciones opuestas y, por tanto, la representación gráfica no contempla ambas rectas con pendientes positivas. De esta forma, se puede representar el sistema de ecuaciones al hacer una reflexión sobre el eje x de cualquiera de las gráficas. Luego, se hace coincidir el origen del plano que se ha girado con el valor de 200 kilómetros del plano que no se ha girado. En la figura 6, presentamos una de las soluciones.

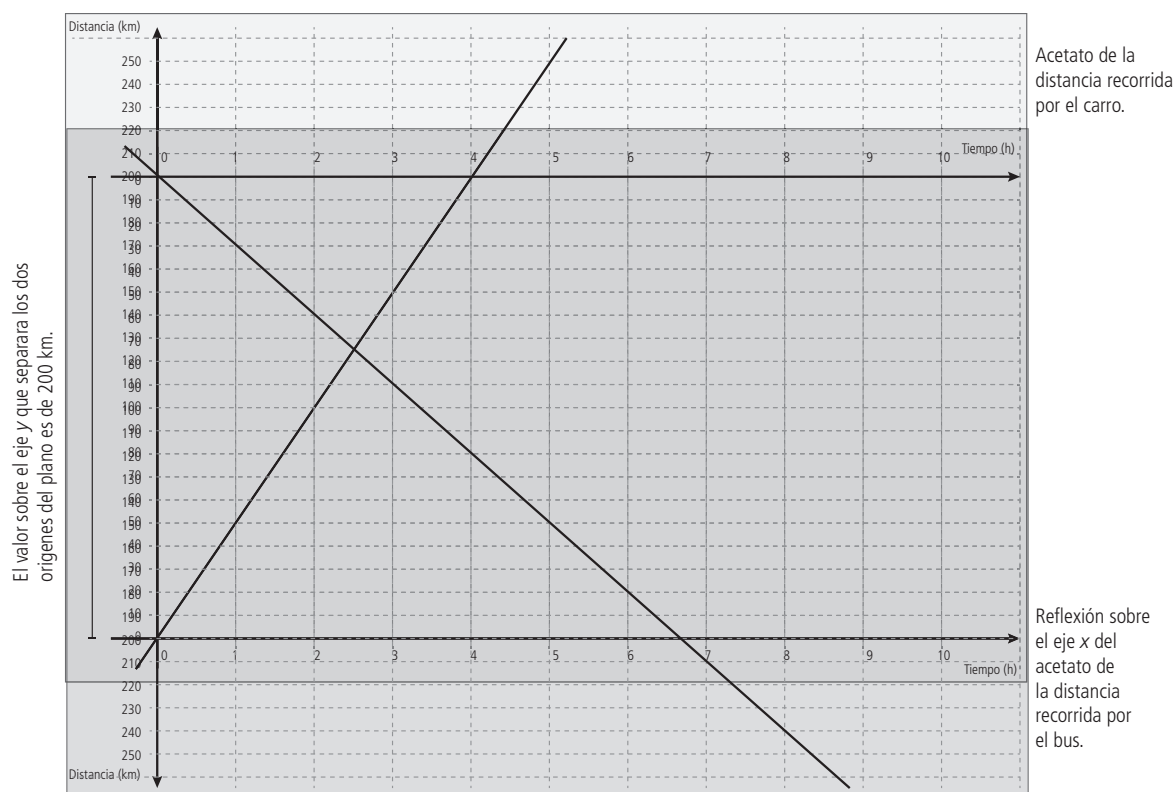


Figura 6. Solución del literal (c)

Por otra parte, el profesor puede brindar ayudas a los estudiantes al preguntarles qué significa, en el contexto dado, cada uno de los parámetros de las rectas. De esta forma, él puede motivar la indagación sobre la relación entre la pendiente de cada recta y la velocidad constante de cada móvil, entre otras cosas.

7.6 Evaluación

Se ha alcanzado la meta de la tarea si los estudiantes

- modelan las tres situaciones de la tarea al representarlas en el plano cartesiano mediante sistemas de ecuaciones lineales;
- relacionan los datos de enunciado con los parámetros de las rectas representadas y argumentan desde las matemáticas dicha relación; y

- establecen movimientos de rectas en el plano para configurar sistemas de ecuaciones lineales que cumplan unas condiciones dadas.

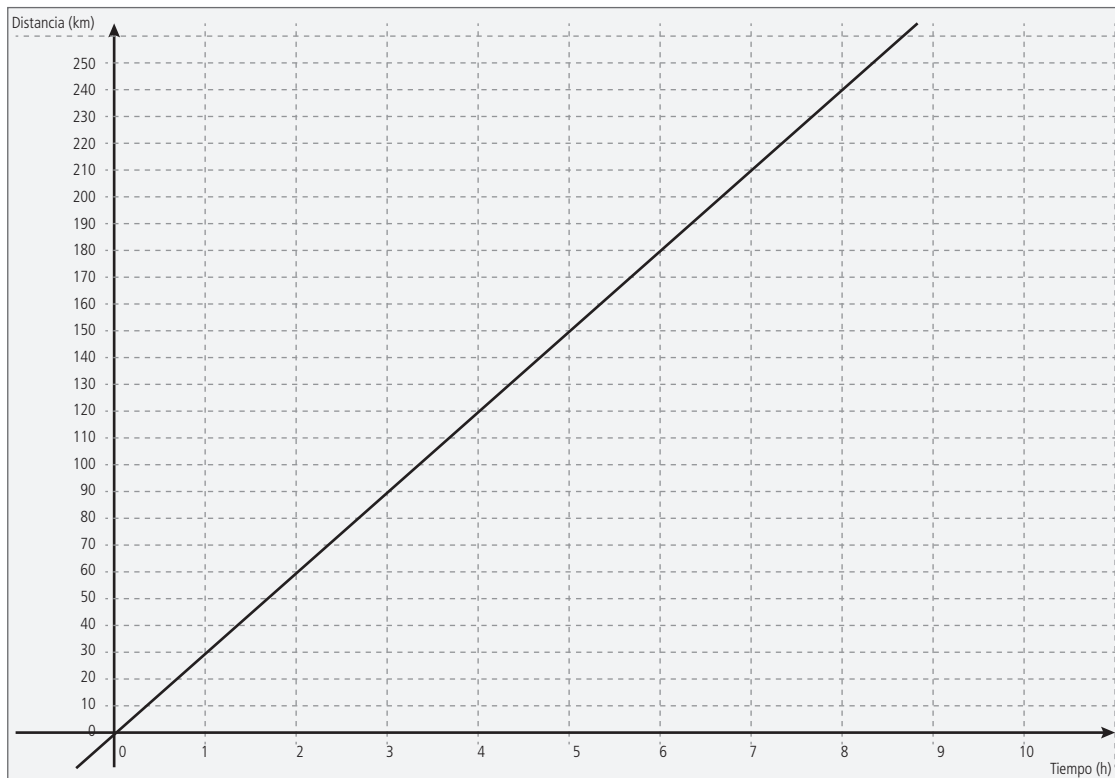
7.7 Material fotocopiable

Dos aficionados a la Fórmula 1 se trasladan hacia la pista de Interlagos para observar la carrera del Gran Premio de Brasil. Los acetatos muestran la gráfica de la velocidad constante del bus y el automóvil en los que se trasladan los aficionados a 30 km/h y 50 km/h, respectivamente. Utiliza la superposición de los acetatos para resolver las siguientes situaciones.

- El bus parte de un paradero y, cuando ha recorrido 40 km, el automóvil inicia su recorrido desde el paradero en la misma dirección del bus. ¿Cuánto tiempo tarda el automóvil en alcanzar al bus?, ¿qué distancia ha recorrido cada vehículo cuando el automóvil alcanza al bus?
- Si el bus sale del paradero a las 7 a. m. y el automóvil parte del mismo punto a las 10 a. m., en la misma dirección que el bus, ¿a qué distancia del paradero se encuentran los dos vehículos cuando uno sobrepasa al otro?, ¿a qué hora se encuentran los vehículos?
- Si el bus parte del paradero hacia la pista y el automóvil parte de la pista hacia el paradero, ambos a las 9 a. m., ¿a qué distancia del paradero se cruzan los dos vehículos si las ciudades están separadas por 200 km?

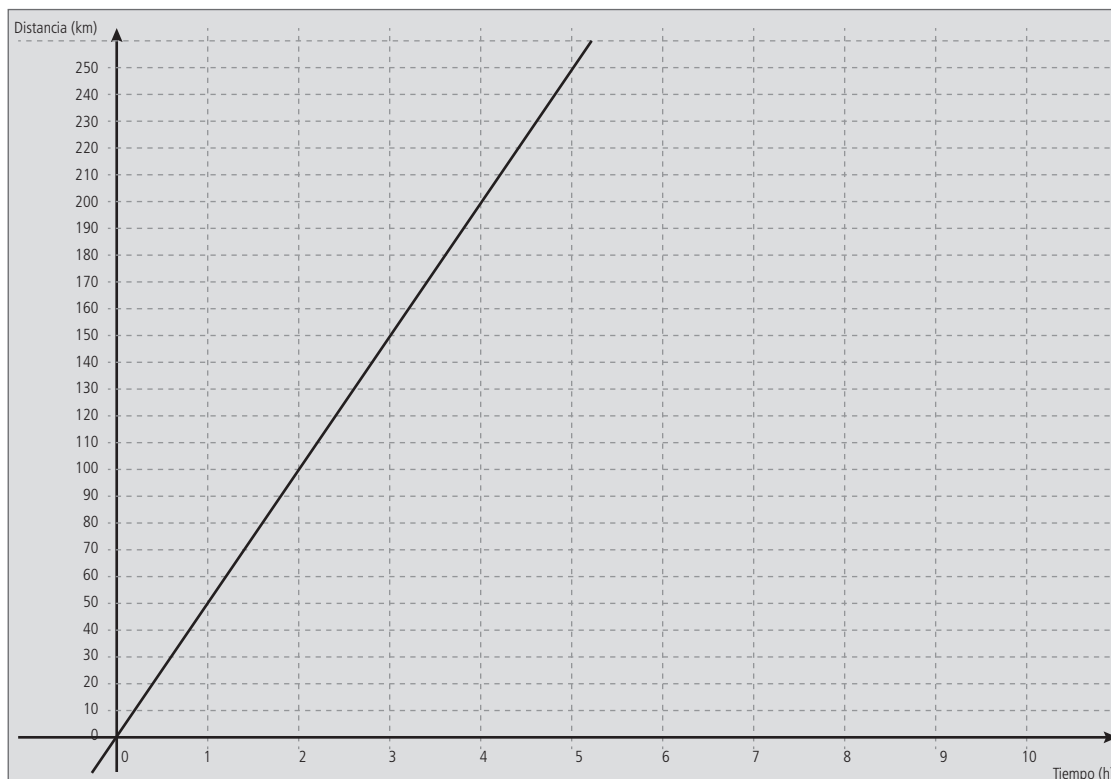
Acetato 1. Distancia recorrida por el bus

Bus 30 km/h



Acetato 2. Distancia recorrida por el carro

Carro 50 km/h



8 Tarea 5: Copias (T5). Sesión 9

El diseño de la tarea Copias involucra el uso de una platilla elaborada en Excel, denominada ParamExcel¹. El objetivo de la tarea se centra en llevar a los estudiantes a la modelación de situaciones de costos con sistemas de ecuaciones lineales. En la tarea Copias, se pretende que los estudiantes identifiquen las variables y parámetros implicados en una situación de costos, con ayuda de la plantilla ParamExcel, y que ejerciten, sintetizen y relacionen rectas en el plano, tablas de valores de un sistema de ecuaciones y el método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

8.1 Descripción de la tarea

A continuación, presentamos las metas, los conceptos y procedimientos que esta tarea aborda, los materiales y recursos que implica y el tipo de agrupamiento de los escolares.

Metas. La meta de la tarea consiste en modelar una situación de costos al identificar las variables y los parámetros implicados en ella, con ayuda de la plantilla ParamExcel.

¹ La plantilla se puede descargar en este enlace. [www.e-sm.net/2gemad01]

Conceptos y procedimientos abordados. Al resolver la tarea, los estudiantes pueden poner en juego los siguientes conceptos y procedimientos: rectas en el plano, tablas de valores de un sistema de ecuaciones y el método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

Sistemas de representación que se activan. La plantilla ParamExcel permite relacionar los sistemas de representación simbólico, numérico, gráfico, verbal y ejecutable, ya que, dados los parámetros de las ecuaciones que modelan la situación que se analiza, se obtiene la tabla de valores y la representación de las rectas asociadas. Además, la plantilla permite relacionar el cambio de la representación de las rectas en el plano con el cambio en los parámetros de las ecuaciones. Se pueden modificar las representaciones gráficas y simbólicas de un sistema de ecuaciones lineales y obtener soluciones numéricas de la intersección de dos rectas en el plano cartesiano, entre otras cosas.

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea muestra una situación pública de costos, modelable a partir de la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

Materiales y recursos. Se utiliza la plantilla ParamExcel, papel, lápiz y fotocopia de la tarea. No existen restricciones para el uso de las herramientas que brinda la plantilla, pero se requiere que, previo a la implementación, el profesor conozca cómo se utiliza.

Agrupamiento de los escolares e interacciones previstas. Se espera que cada pareja de estudiantes pueda resolver la tarea en un computador o tableta que cuente con la plantilla ParamExcel, previamente descargada. Al comenzar, el profesor contextualiza al grupo frente a la tarea que se desarrollará y estimula el uso de la plantilla, según los procedimientos que cada pareja realiza. Los estudiantes hacen la selección de los datos numéricos relevantes para construir un sistema de ecuaciones lineales que modele la situación, ubican dichos datos en la plantilla para interpretar los valores arrojados en la tabla, dan sentido a la gráfica obtenida y comprueban si la solución del sistema mostrada en la tabla o en la gráfica atiende a la solución de la pregunta (si tiene sentido o no de acuerdo con el contexto). Durante la puesta en común de los procedimientos de los estudiantes, el profesor media las opiniones y explicaciones de cada pareja, orienta y cuestiona sobre las soluciones obtenidas.

8.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

La primera parte de la tarea está diseñada para una sesión de clase de 55 minutos. Se sugiere organizar los primeros 30 minutos de la siguiente manera.

Presentación y exploración libre (10 minutos). El profesor presenta la tarea, permite a los estudiantes explorar la plantilla y socializa los elementos contenidos en ella.

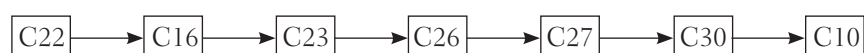
Identificación de parámetros en la situación (5 minutos). Cada pareja de estudiantes lee la situación e identifica los parámetros y las posibles ecuaciones que modelan la situación presentada.

Solución (10 minutos). Cada pareja de estudiantes resuelve la tarea en la plantilla ParamExcel, siguiendo las instrucciones incluidas en su redacción. El profesor observa las soluciones establecidas por los estudiantes y promueve la verificación de las respuestas y la exploración de la plantilla, al variar los parámetros de las ecuaciones.

Puesta en común (5 minutos). El profesor selecciona dos o tres parejas para que expongan y justifiquen la solución a la situación. También conviene reflexionar sobre la relación que se observa entre los sistemas de representación involucrados.

8.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

Los estudiantes pueden activar todas o algunas de las siguientes capacidades: C10, C16, C22, C23, C26, C27 y C30 (ver tabla 2). Se espera que ellos, luego de explorar las herramientas de la plantilla, determinen ecuaciones lineales que representen rectas que cumplan con las condiciones pedidas en la tarea y analicen la relación de estos elementos con tablas de valores. El siguiente es un posible camino que pueden seguir los estudiantes al resolver la tarea.



8.4 Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Los estudiantes pueden manifestar dificultades asociadas a la interpretación de las variables dadas en el enunciado con su respectiva representación gráfica. Es posible que los estudiantes escriban expresiones que no concuerden con las relaciones entre las variables en una situación, al confundir los parámetros (pendiente, intercepto). Por otra parte, pueden incurrir en errores al hacer una lectura incorrecta de los valores numéricos que determinan la solución del sistema. Los estudiantes pueden incurrir en los siguientes errores: E1, E3, E11, E15 (ver tabla 3).

Aunque la tarea se trabaja en Excel, el uso incorrecto de las herramientas del programa no se considera como error. Por esa razón, es necesario que el profesor verifique constantemente las producciones de sus estudiantes durante el desarrollo de la tarea.

8.5 Ayudas para el profesor

Previamente a la implementación de la tarea, se sugiere que el profesor la resuelva utilizando la plantilla ParamExcel y se familiarice con sus herramientas. La plantilla es una herramienta que permite identificar los parámetros implicados en una situación de costos para plantear y representar las rectas asociadas, y analizar la variación en tablas de valores. De no contar con la plantilla, es posible adaptar la tarea para que los estudiantes la resuelvan en hojas milimetradas. Sin embargo, esto implica un mayor trabajo algebraico y gráfico en el que se activarán más capacidades de las previstas. Es recomendable que el profesor maneje los tiempos en los que los estudiantes solucionan cada literal y así pueda verificar si las producciones que ellos realizan en cada momento cumplen o no con las expectativas de la tarea. El cambio de parámetros en las ecuaciones, como trabajo posterior, ayudará a generalizar relaciones entre ecuaciones, tablas y gráficas. En la figura 7, mostramos la estructura de la plantilla.

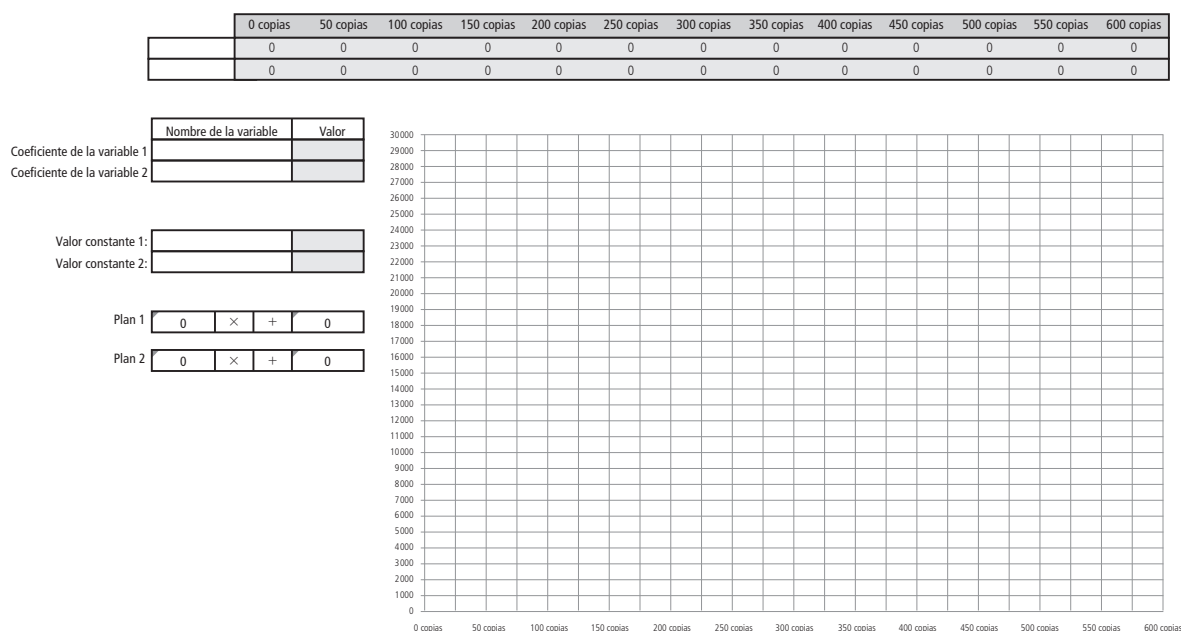


Figura 7. Estructura de la plantilla

8.6 Evaluación

Es posible verificar que se ha cumplido con la meta de la tarea si los estudiantes

- identifican los parámetros implicados en la situación de costos y los relacionan con las ecuaciones lineales correspondientes;
- comparan los valores obtenidos en la tabla de valores y los relacionan con las ecuaciones y la gráfica obtenida; y
- relacionan y verifican la respuesta obtenida de acuerdo con las condiciones de la tarea.

8.7 Material fotocopiable

Lee atentamente la siguiente situación y resuélvela desarrollando los puntos descritos a continuación con ayuda de la plantilla de Excel (ParamExcel).

Un establecimiento en Bogotá quiere transmitir en directo el evento Gran Premio de Brasil de la Fórmula 1. Un local ofrece los siguientes planes a los organizadores para multicopiar volantes con la publicidad.

Plan 1: \$50 por copia.

Plan 2: Cuota diaria de \$4 000 más \$40 por copia.

Si los organizadores desean fotocopiar todos los volantes el mismo día, ¿Para qué cantidad de copias los planes representan igual costo?

- Identifica los valores dados en la situación y escríbelos en las casillas verdes de la plantilla en las cuales consideres que deben estar. Ten en cuenta los títulos que preceden las casillas. Explica por qué has ubicado cada valor en cada casilla.
- Compara los valores obtenidos en la tabla de casillas amarillas y relaciónalos con la gráfica obtenida. ¿Los valores y la gráfica representan la situación dada? Explica tu respuesta.
- Revisa tus procesos y, de ser necesario, ubica nuevamente en las casillas verdes los valores identificados en la situación. Responde la pregunta dada.
- Explica qué relación existe entre las ecuaciones mostradas por la plantilla y los valores dados en la situación.

9 Tarea 6: Heladería (T6). Sesión 10

Esta tarea se realiza con el programa Geogebra. Su objetivo es que los estudiantes modelen una situación de costos relacionada con una heladería, en la que hay que determinar el punto de equilibrio entre costos y ventas en el negocio. Los estudiantes deben identificar las variables y los parámetros implicados en la situación, determinar las ecuaciones del sistema y, con ayuda del software, encontrar su solución.

9.1 Descripción de la tarea

La tarea consiste en modelar una situación laboral contable en la que se deben formular las ecuaciones de costos e ingresos a partir de los valores que se presentan. A continuación, mostramos los componentes de la tarea.

Metas. La meta de la tarea consiste en establecer el punto de equilibrio entre dos variaciones lineales.

Conceptos y procedimientos abordados. Al resolver la tarea, los estudiantes pueden poner en juego conceptos y procedimientos como ecuación estándar de una recta, representación gráfica de rectas en el plano y método gráfico para solucionar un sistema de ecuaciones lineales.

Sistemas de representación que se activan. Al utilizar el software Geogebra y comparar los parámetros de las ecuaciones con sus respectivas gráficas o valores numéricos, los estudiantes pueden relacionar las representaciones simbólica, numérica, gráfica, verbal y ejecutable del sistema de ecuaciones planteado. Ellos pueden evaluar las ecuaciones estándar de las funciones de costos e ingresos, relacionarlas con su respectiva tabla de valores, y determinar e interpretar la solución del sistema, a partir de la gráfica obtenida en el plano cartesiano.

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea hace referencia a una situación pública en la que se incluyen costos.

Materiales y recursos. Para resolver la tarea, se utiliza el software Geogebra, papel y lápiz.

Agrupamiento de los estudiantes e interacciones previstas. Se prevén los mismos agrupamientos e interacciones que se propusieron en la tarea Copias en la que también se utiliza el software Geogebra.

9.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Esta tarea se desarrolla en la sesión nueve, junto con la tarea Copias. Se prevé un tiempo de 25 minutos si se resuelve con el software Geogebra. El tiempo se puede distribuir en momentos similares a los indicados para la tarea Copias. Se sugiere que el profesor resuelva la tarea previamente a la implementación, para que se familiarice con las herramientas del programa que permiten solucionar la situación propuesta. Adicionalmente, se sugiere que oriente a los estudiantes a construir las ecuaciones que modelan la situación, para luego representarlas en el programa y posteriormente interpretar los resultados en términos de las variables que contiene el problema. La tarea se caracteriza por tener una única respuesta. Esto permite que el profesor realice una verificación, al presentar los resultados de dos o tres parejas a todo el grupo.

9.3 Capacidades y caminos de aprendizaje

Los estudiantes pueden activar todas o algunas de las siguientes capacidades: C1, C7, C9, C10, C16, C20, C22, C23, C24, C25 y C27 (ver tabla 2). Un posi-

ble camino que pueden seguir los estudiantes al resolver la tarea es el siguiente.



9.4 Errores en los que los estudiantes pueden incurrir

Los estudiantes pueden manifestar algunas dificultades relacionadas con los parámetros de la ecuación de una recta en su forma estándar $y = mx - b$, al representarla sin hacer la tabulación. Por ejemplo, pueden tomar el valor de b como la pendiente de la recta. Además, pueden suponer que todas las gráficas de las rectas son lineales y no afines, relacionar incorrectamente el valor de las pendientes de dos rectas con su posición relativa en el plano, considerar que la igualdad en los coeficientes de las mismas variables implica la representación de rectas coincidentes o escribir expresiones que no tienen concordancia con las relaciones entre las variables de la situación.

Los estudiantes pueden incurrir en los siguientes errores: E2, E3, E6, E7, E9, E11, E13, E19, (ver tabla 3).

9.5 Ayudas para el profesor

Se deben tener en cuenta las mismas condiciones de la tarea Copias ya que esta tarea se resuelve en la misma sesión de clase. Al comenzar la segunda parte de la sesión, el profesor puede presentar la tarea, indicar qué herramientas del software se utilizarán y remitir a los estudiantes al material fotocopiable. Para cada ítem de la tarea, se sugiere que el profesor realice la respectiva instrucción verbal y estimule el uso del software, según la actuación que observa en cada pareja. Al momento de la puesta en común de los procesos de los estudiantes, él debe mediar la opinión y explicación de cada pareja, y orientar y motivar la discusión sobre las soluciones obtenidas.

9.6 Evaluación

Se ha cumplido con la meta de la tarea si los estudiantes

- plantean las ecuaciones para las funciones de costos e ingresos;
- determinan el punto de equilibrio del negocio; y
- relacionan y verifican la respuesta obtenida de acuerdo a las condiciones de la tarea.

9.7 Material fotocopiable

Por medio del programa Geogebra, resuelve la siguiente situación.

Dentro del establecimiento en que se transmite la carrera de la Fórmula 1 hay una venta de helados. El vendedor compra al proveedor helados a \$400 la

unidad, paga un arriendo mensual por valor de \$150 000 y vende los helados a \$900 cada uno. Determina la función de costos, la función de ingresos y el punto de equilibrio.

10 Evaluación final: Tarea Gran premio de Brasil (EF) Sesión 11

En este apartado, presentamos la tarea transversal titulada Gran premio de Brasil. Esta tarea, que se trabaja a lo largo de toda la unidad didáctica, hace el cierre como evaluación final para los estudiantes. A continuación, describimos la tarea. Para ello, indicamos las sugerencias metodológicas para su implementación, las explicaciones y las ayudas para el profesor. Al finalizar, mostramos los criterios de evaluación que permiten determinar en qué nivel de desempeño se encuentra un estudiante en términos del alcance de los objetivos propuestos para la unidad didáctica.

10.1 Descripción de la tarea

La tarea Gran premio de Brasil presenta una situación problema contextualizada en el deporte de Fórmula 1. Se presentan tablas que contienen datos numéricos con información real de una competencia y se solicita a los estudiantes estimar cuándo un piloto sobrepasa a otro durante la carrera. Con la tarea se busca que los estudiantes apliquen los conceptos trabajados a lo largo de la unidad didáctica para modelar y solucionar el problema propuesto. La modelación y solución requieren el uso de sistemas de ecuaciones lineales.

Las tablas que se entregan a los estudiantes presentan los siguientes datos²: posición de llegada de cada piloto (Pos); número de automóvil (No); nombre del piloto (Piloto); equipo al que pertenece (Equipo); número de vueltas recorridas en la competencia (Vueltas); tiempo que cada piloto permaneció en la competencia (Tiempo/Retirado); posición de partida (Grilla); puntos ganados en competencia (Pts); cantidad de veces que un piloto paró en pits (Paradas); número de vuelta en la que cada piloto paró en pits (Vuelta); hora del día en que cada piloto paró en pits (Hora del día); el tiempo promedio de las paradas en pits de cada piloto (Tiempo); y el tiempo acumulado de las paradas en pits de cada piloto (Tiempo total en pits).

² Los datos fueron tomados de la página principal de la Fórmula 1: <http://www.formula1.com>. Las tablas se proporcionan como material fotocopiable de la tarea Gran premio de Brasil.

10.2 Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Sugerimos que, en la primera sesión de la unidad didáctica, el profesor presente la tarea y motive a los estudiantes con la descripción de la Fórmula 1. La tarea se resuelve a partir de la segunda sesión y se desarrolla en tres partes: planteamiento, ejecución y resolución (ver figura 1). En cada parte, las parejas de trabajo resolverán la tarea siguiendo las indicaciones dadas por el profesor en los tiempos asignados para cada sesión de clase. Se espera que el profesor asigne 5 minutos de cada sesión para que los estudiantes propongan estrategias de solución de la tarea, intenten solucionar el problema y verifiquen los procedimientos realizados.

A continuación, describimos las partes de la tarea, presentamos los procedimientos que esperamos que los estudiantes desarrollen y sugerimos las acciones para el profesor.

Parte 1 (P1). Elección de pilotos y de información relevante

En esta parte, los estudiantes deben elegir tres pilotos de los presentados en las tablas y discriminar la información relevante. Se espera que enfrenten la situación con base en su conocimiento de los conceptos de función lineal y afín, ecuación lineal, velocidad de un móvil, media aritmética, y conversión de unidades de tiempo y longitud. Los estudiantes deberán trabajar con los datos que indican posición de partida y llegada de un piloto elegido, tiempo total empleado por el piloto durante la carrera, longitud de la pista y número de vueltas. La interpretación de esta información debe permitir a los estudiantes identificar si existió o no sobrepaso entre dos pilotos elegidos para luego proponer estrategias para solucionar el problema.

Para presentar la tarea, el profesor debe describir la situación y explicar el contenido de cada tabla. Posteriormente, debe inducir a los estudiantes a usar datos relevantes para empezar a buscar una estrategia para solucionar el problema. Para ello, puede formular preguntas orientadoras como las siguientes.

- ¿Bajo qué criterios está organizada la información de las tablas?
- ¿Qué información consideras que no aporta a la solución del problema?
¿Por qué?
- ¿Qué información puedes necesitar, que no se encuentra en las tablas? ¿Esa información se puede deducir de las tablas?

Parte 2 (P2). Búsqueda de estrategia y de información faltante.

En esta parte, los estudiantes deben encontrar una estrategia para determinar en qué vuelta y a qué tiempo transcurrido, un piloto sobrepasa a otro, e indagar sobre la información faltante para llevar a cabo la estrategia elegida. Se espera que, al hacer uso del tiempo total de la carrera y la distancia total recorrida del piloto, los estudiantes puedan realizar procedimientos con los que

- establezcan la razón entre la distancia total de carrera y el tiempo total empleado por un piloto;
- realicen la conversión de la distancia total de la carrera a metros y el tiempo total a segundos;
- hallen la razón entre esos dos datos;
- estimen la velocidad promedio de los pilotos elegidos; e
- indaguen sobre la información faltante (por ejemplo la distancia que separa los vehículos en la partida).

El profesor debe realizar preguntas que inciten a indagar o estimar las velocidades de los pilotos elegidos utilizando las razones distancia y tiempo. Además, se sugiere que formule preguntas que enfoquen a los estudiantes a establecer la distancia que separa los móviles al iniciar la competencia. Para esto, él puede plantear preguntas como las siguientes.

- ¿Es suficiente tener las velocidades promedio de cada piloto para saber en qué momento uno pasa al otro?
- ¿Importa en algo la disposición física de los vehículos al iniciar la carrera?

Sugerimos que el profesor elija dos parejas de estudiantes cuyos procedimientos y argumentos se acerquen más a la solución de la segunda parte de la tarea. Las parejas elegidas pueden presentar sus avances a todo el grupo para que el profesor oriente al curso en la evolución de la solución del problema.

Parte 3 (P3). Reformular y presentar el plan de solución diseñado para resolver el problema.

A partir de la quinta sesión, los estudiantes podrán aplicar conceptos relacionados con el método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. Se espera que reformulen las estrategias propuestas en sesiones anteriores y modelen la situación por medio de sistemas de ecuaciones lineales. De esta forma, el profesor debe guiar a los estudiantes a realizar procedimientos con los que

- planteen las ecuaciones que modelan la estimación del desplazamiento de los pilotos;
- tabulen las ecuaciones;
- representen gráficamente las ecuaciones con la ayuda de cualquier recurso o material;
- determinen la solución del sistema utilizando el método gráfico; y
- contextualicen los datos encontrados en términos del tiempo y número de vueltas transcurridas cuando un piloto sobrepasa a otro.

En las últimas sesiones de clase de la implementación de la unidad didáctica, sugerimos que el profesor induzca al estudiante a indagar sobre posibles rela-

ciones funcionales entre los datos mostrados o posibles proporciones que se puedan extraer analizando los datos de las tablas. Debe orientar a los grupos para que consoliden sus estrategias hacia procedimientos matemáticos propios de los sistemas de ecuaciones lineales como relaciones funcionales, tablas, ecuaciones y gráficas.

Para evaluar a los estudiantes al finalizar la implementación de la unidad didáctica, proponemos que el profesor asigne una sesión de clases para que todas las parejas de trabajo presenten su solución del problema.

10.3 Criterios de evaluación por niveles de desempeño

Es posible valorar los procedimientos, construcciones y resultados obtenidos por los estudiantes al tener en cuenta las acciones que dan evidencia de las capacidades que activan cuando solucionan la tarea transversal Gran premio de Brasil. A continuación, presentamos las acciones y capacidades que caracterizan el nivel de desempeño de los estudiantes.

Nivel superior. El estudiante que se ubica en este nivel construye y modifica las ecuaciones lineales que modelan la velocidad de dos o más autos en la situación propuesta. Representa las ecuaciones en el plano cartesiano y determina cuánto tiempo ha transcurrido y qué distancia se ha recorrido cuando un auto alcanza a otro. Utiliza diferentes recursos (tecnológicos o físicos) para comprobar y presentar sus resultados. Evidencia la activación de las siguientes capacidades: C1, C7, C8, C12, C19, C20, C22, C26, C29 y C33 (ver tabla 2). Es posible que los estudiantes apoyen sus resultados en el uso de alguna herramienta tecnológica para determinar más de un sistema de ecuaciones lineales que dan respuesta a la solución del problema y realicen el procedimiento con más de una pareja de pilotos.

Nivel alto. El estudiante que se ubica en este nivel determina las ecuaciones lineales que describen el movimiento de dos autos de la situación propuesta. Representa las ecuaciones en el plano cartesiano y establece cuánto tiempo ha transcurrido y qué distancia se ha recorrido cuando un auto alcanza al otro. Evidencia la activación de las siguientes capacidades: C1, C7, C8, C12, C19, C20, C22, C26, C29 y C33. El estudiante incurre en los errores E14 y E20 (ver tabla 3). En este nivel de desempeño, los estudiantes pueden determinar un sistema de ecuaciones lineales, graficar las rectas utilizando escalas adecuadas en el plano cartesiano, estimar el tiempo y distancia cuando un auto pasa a otro y argumentar los procedimientos que siguieron para resolver el problema.

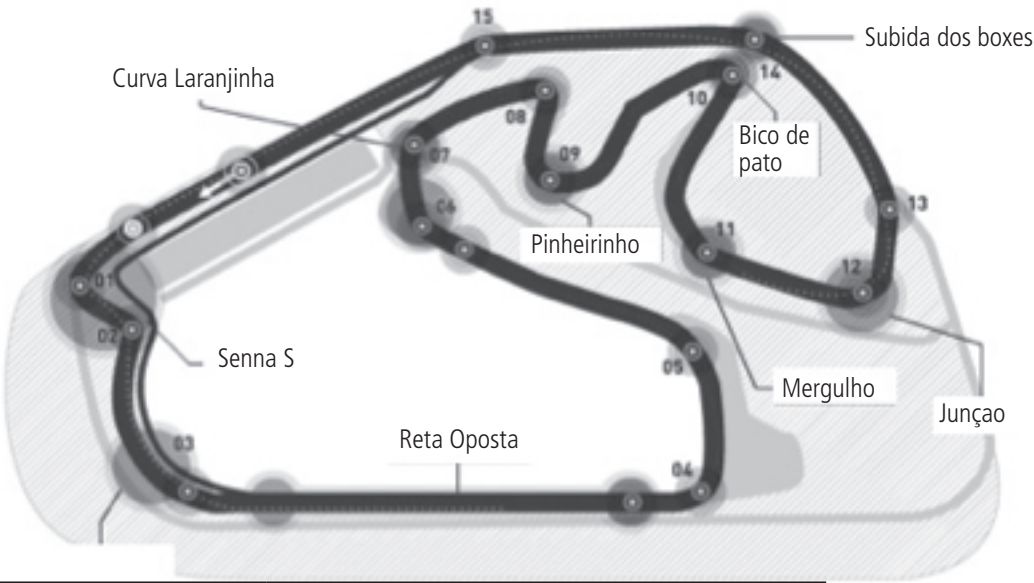
Nivel básico. El estudiante que se ubica en este nivel determina las ecuaciones lineales que describen el movimiento de dos autos de la situación propuesta y

las representa en el plano. Realiza aproximaciones del tiempo transcurrido y la distancia recorrida cuando un vehículo supera a otro. Activa las capacidades C1, C7, C8, C12, C19, C20, C22, C26, C29 y C33. Incurre en todos o algunos de los siguientes errores: E6, E11, E13, E14 y E20.

Nivel bajo. El estudiante que se ubica en este nivel se limita a realizar estimaciones de las posibles velocidades de dos automóviles en la situación propuesta. Los sistemas de ecuaciones que propone no modelan la situación y se evidencian representaciones incorrectas de las ecuaciones planteadas. Además, puede proponer sistemas de ecuaciones lineales sin solución. Por otra parte, los argumentos que expone cuando explica la solución del problema no incluyen los conceptos trabajados durante la unidad didáctica. Activan únicamente las capacidades C22 y C31.

10.4 Material fotocopiable

A continuación, encontrarás información relacionada con el Gran premio de Brasil de la Fórmula 1. Se presenta una imagen e información de la pista y dos tablas que muestran los resultados finales y el registro de paradas durante la competencia del 7 de noviembre de 2010.



Información de la pista	
Sao Paulo	
Fecha:	07 Nov 2010
Nombre del circuito:	Autódromo José Carlos Pace
Número de vueltas:	71
Longitud del circuito:	4 309 km
Distancia:	305 909 km
Récord de vuelta:	1:11473 JP Montoya (2004)

Tabla de resultados finales en la competencia							
Pos	No	Piloto	Equipo	Vueltas	Tiempo	G	Pts
1	5	Sebastian Vettel	RBR-Renault	71	1:33:11 803	2	25
2	6	Mark Webber	RBR-Renault	71	+4,2 secs	3	18
3	8	Fernando Alonso	Ferrari	71	+6,8 secs	5	15
4	2	Lewis Hamilton	McLaren-Mercedes	71	+14,6 secs	4	12
5	1	Jenson Button	McLaren-Mercedes	71	+15,5 secs	11	10
6	4	Nico Rosberg	Mercedes GP	71	+35,3 secs	13	8
7	3	Michael Schumacher	Mercedes GP	71	+43,4 secs	8	6
8	10	Nico Hulkenber	Williams-Cosworth	70	+1 lap	1	4
9	11	Robert Kubica	Renault	70	+1 lap	7	2
10	23	Kamui Kobayashi	BMW Sauber-Ferrari	70	+1 lap	12	1
11	17	Jaime Alguersuari	STR-Ferrari	70	+1 lap	14	
12	14	Adrian Sutil	Force India-Mercedes	70	+1 lap	22	
13	16	Sebastian Buemi	STR-Ferrari	70	+1 lap	19	
14	9	Rubens Barrichello	Williams-Cosworth	70	+1 lap	6	
15	7	Felipe Massa	Ferrari	70	+1 lap	9	

Tabla de tiempos en pits							
Stops	No	Piloto	Equipo	Vueltas	Hora	Tiempo	Total tiempo Pit
1	1	Jenson Button	McLaren-Mercedes	11	14:17:48	21,054	21,054
1	7	Felipe Massa	Ferrari	12	14:19:05	21,025	21,025
1	9	Rubens Barrichello	Williams-Cosworth	13	14:20:23	29,061	29,061
2	7	Felipe Massa	Ferrari	13	14:20:47	25,161	46,186
1	10	Nico Hulkenber	Williams-Cosworth	14	14:21:39	21,884	21,884
1	11	Robert Kubica	Renault	14	14:21:41	22,278	22,278
1	22	Nick Heidfeld	BMW Sauber-Ferrari	14	14:21:45	21,648	21,648
1	20	Christian Klien	HRT-Cosworth	11	14:22:58	23,342	23,342
1	17	Jaime Alguersuari	STR-Ferrari	15	14:23:05	22,069	22,069
1	15	Vitantonio Liuzzi	Force India-Mercedes	16	14:24:30	21,242	21,242
1	24	Timo Glock	Virgin-Cosworth	16	14:24:53	21,950	21,950
1	19	Heikki Kovalainen	Lotus-Cosworth	17	14:26:11	21,480	21,480
1	16	Sebastian Buemi	STR-Ferrari	18	14:27:01	25,914	25,914
1	12	Vitaly Petrov	Renault	19	14:28:30	22,884	22,884
1	2	Lewis Hamilton	McLaren-Mercedes	20	14:29:25	21,255	21,255

Encuentra una estimación de la vuelta y tiempo que transcurrió cuando un piloto pudo sobrepasar al menos una vez a otro piloto.

Parte 1. Elige tres pilotos de los presentados en las tablas anteriores. Discrimina la información relevante presentada en las tablas.

Parte 2. Encuentra una estrategia para determinar en qué vuelta y a qué tiempo transcurridos sobrepasa un piloto a otro. Discrimina la información faltante para llevar a cabo la estrategia elegida.

Parte 3. Reformula y presenta el plan de solución diseñado para la solución del problema.

11 Referencias

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor.

12 Material fotocopiable

TD. Tarea diagnóstica: figuras con tres rectas

En los puntos 1 a 3, representa las rectas en un mismo plano y responde las siguientes preguntas.

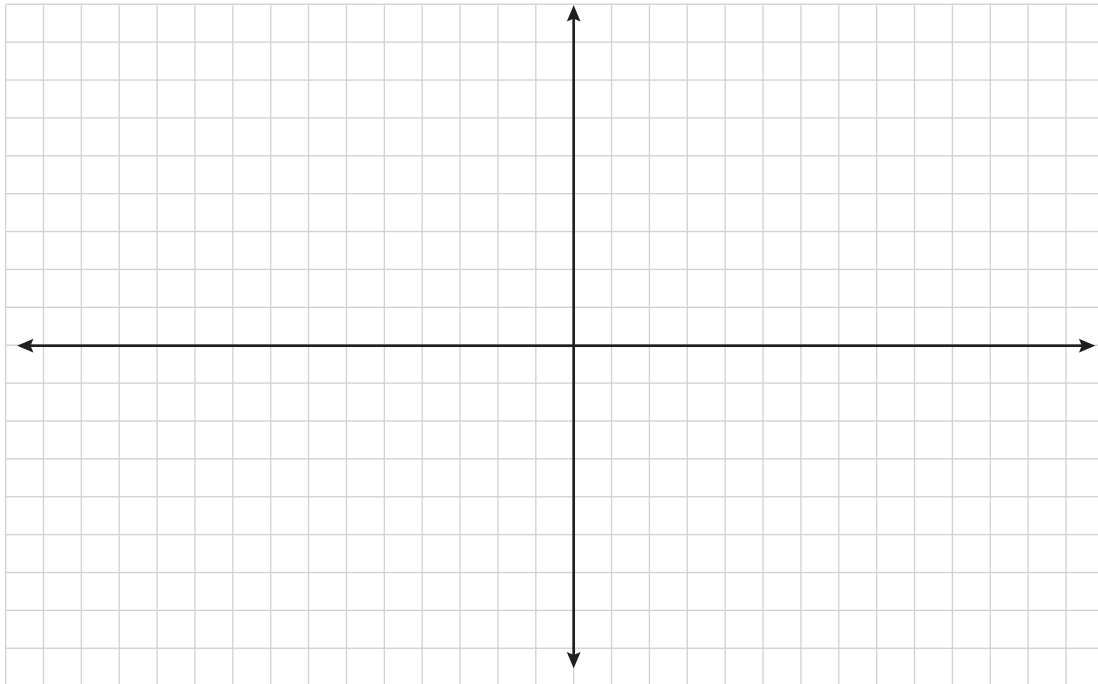
- ¿Qué figura se forma?
- ¿Por qué se forma esa figura?
- ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos donde se intersectan las rectas?

Parte 1

Recta 1: $y = -\frac{3}{2}(x) + 4$

Recta 2: $y = -\frac{1}{2}(x) + 4$

Recta 3: $y = -\frac{1}{2}(x) - 2$

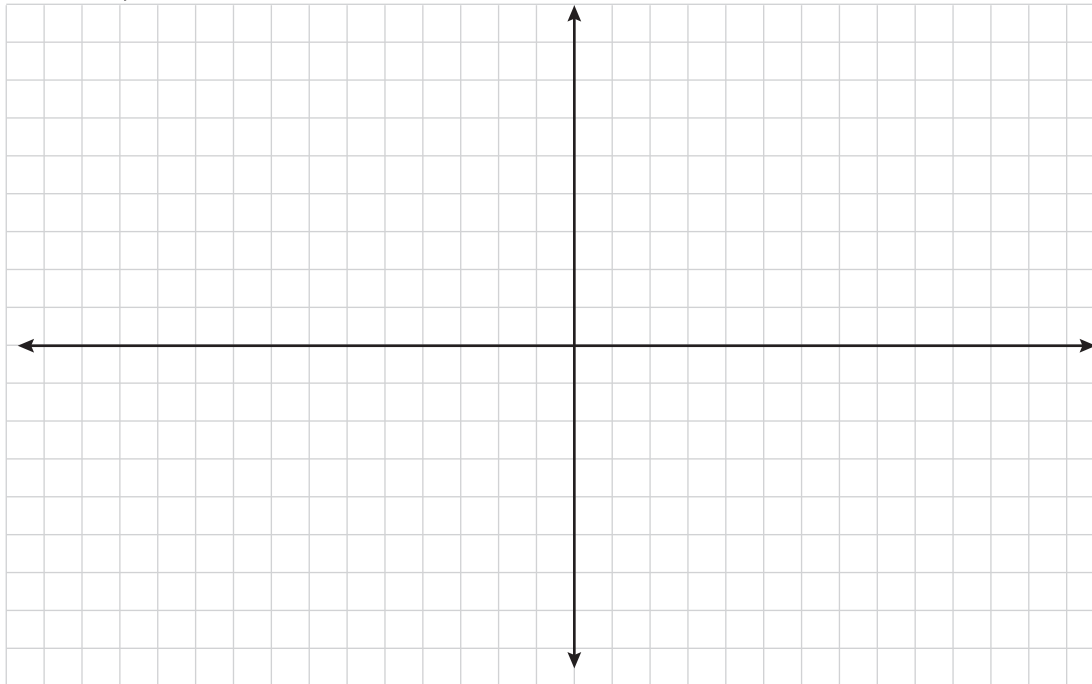


Parte 2

Recta 1: $y = 3x$

Recta 2: $y = 1 - x$

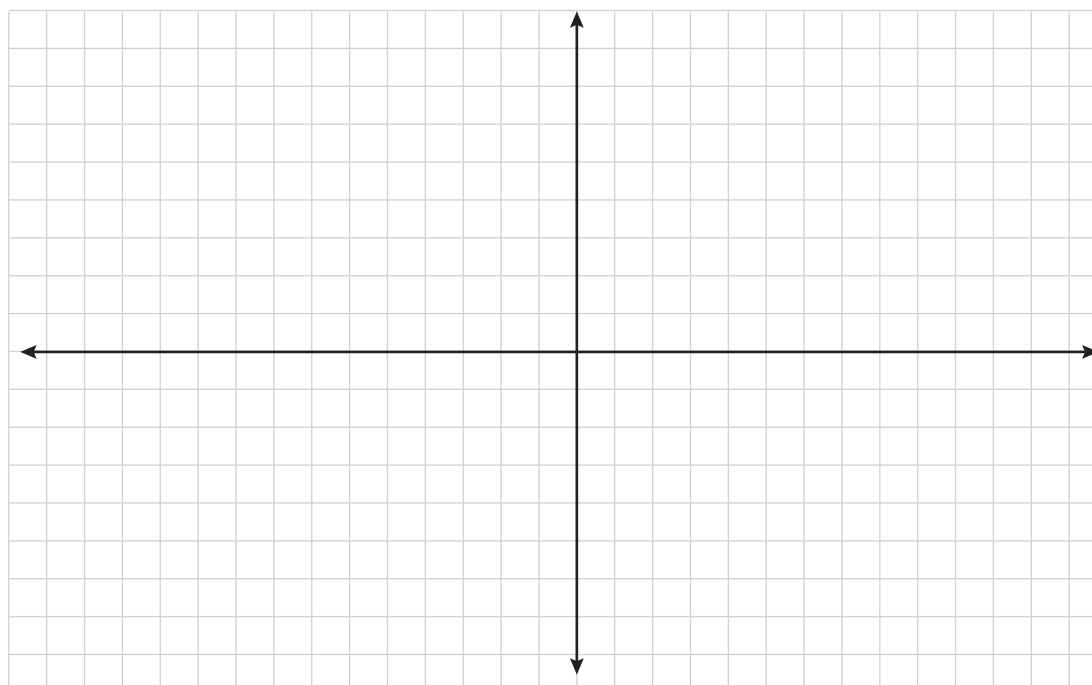
Recta 3: $y = 3x - 2$

*Parte 3*

Recta 1: $2x + y = 0$

Recta 2: $y = 3 - x$

Recta 3: $y + 1 = -x$



T1. Sistemas equivalentes

Representa cada uno de los siguientes sistemas en un plano y responde las preguntas.

Sistema A: $y = x - 1$

$$y = -x - 3$$

Sistema B: $y = 3x + 1$

$$y = 0,5x - 1,5$$

Sistema C: $3y = x - 5$

$$y = x - 3$$

- ¿Cuáles son las gráficas que representan cada sistema?
- Si los sistemas A y B son equivalentes, ¿qué propiedad gráfica cumplen?
- ¿Qué se debe modificar en la ecuación y gráfica del sistema C para que los tres sean equivalentes? Explica tu respuesta.

T2. Rectas en el plano

a) Ubica en un plano pares ordenados (x, y) que cumplan las siguientes condiciones.

- $x + y = 2$ y traza la recta que los une.

- $x - y = 3$ y traza la recta que los une.

¿En qué punto se cortan las rectas? ¿Qué relación tiene el punto de corte de las dos rectas con las condiciones dadas?

b) Ubica en un plano pares ordenados (x, y) que cumplan las siguientes condiciones.

- $x + y = 5$ y traza la recta que los une.

- $2x + 2y = 10$ y traza la recta que los une.

¿En qué punto se cortan las rectas? ¿Qué relación tiene el punto de corte de las dos rectas con las condiciones dadas?

c) Ubica en un plano pares ordenados (x, y) que cumplan las siguientes condiciones.

- $x + y = 3$ y traza la recta que los une.

- $x + y = 6$ y traza la recta que los une.

¿En qué punto se cortan las rectas? ¿Qué relación tiene el punto de corte de las dos rectas con las condiciones dadas?

d) Establece la relación existente entre los sistemas de ecuaciones y sus respectivas representaciones gráficas.

T3. Encontrar Rectas

Las dos rectas que se obtienen al representar gráficamente las dos ecuaciones de un sistema se cortan en el punto $(1, -2)$.

Haciendo uso de Geogebra, resolver las siguientes cuestiones.

- Si la recta cuya ecuación es $x + 2y = -3$ es una de las rectas representadas, determina cuál puede ser la ecuación de la otra recta.
- Representa dos sistemas de ecuaciones lineales (dos pares de rectas) que se intersecten en $(-3, -4)$. Completa las siguientes tablas con las ecuaciones de cada sistema.

Sistema de ecuaciones <i>a</i>	
Ecuación 1	
Ecuación 2	
Sistema de ecuaciones <i>b</i>	
Ecuación 3	
Ecuación 4	

- ¿Las ecuaciones 1 y 3 forman un sistema equivalente a las ecuaciones 2 y 4? Explica la respuesta.

T4. Bus y Carro

Dos aficionados a la Fórmula 1 se trasladan hacia la pista de Interlagos para observar la carrera del Gran Premio de Brasil. Los acetatos muestran la gráfica de la velocidad constante del bus y el automóvil en los que se trasladan los aficionados a 30 km/h y 50km/h, respectivamente. Utiliza la superposición de los acetatos para resolver las siguientes situaciones.

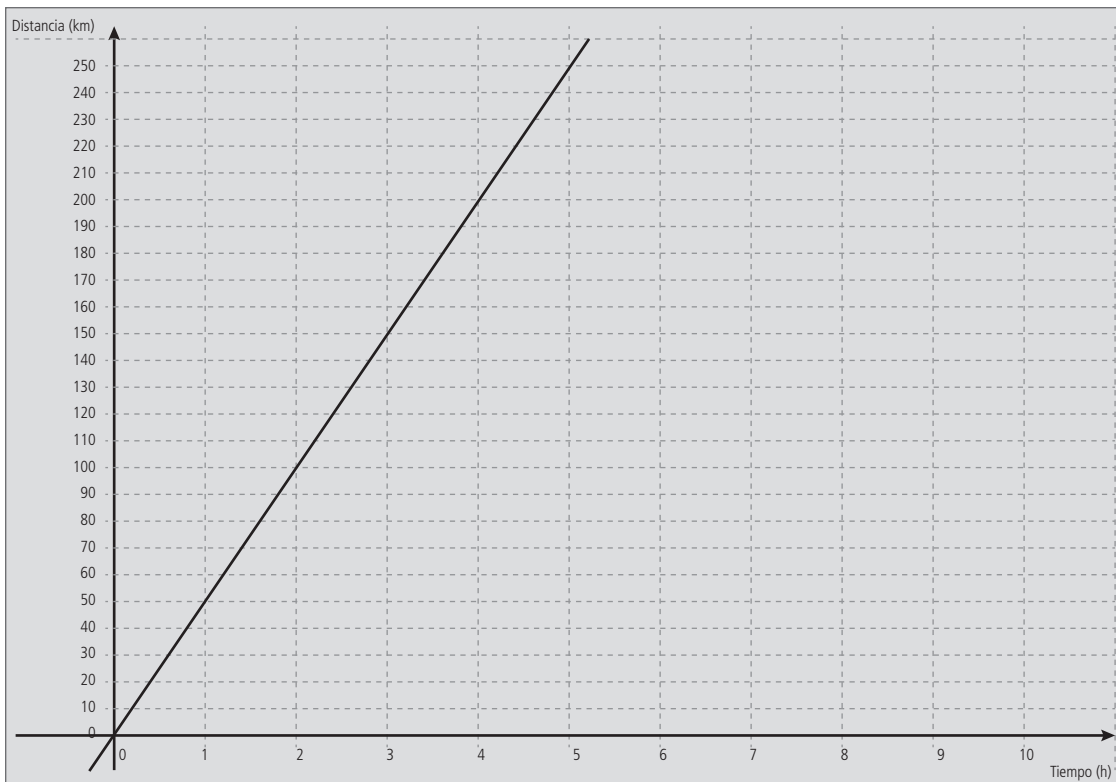
- El bus parte de un paradero y, cuando ha recorrido 40 km, el automóvil inicia su recorrido desde el paradero en la misma dirección del bus. ¿Cuánto tiempo tarda el automóvil en alcanzar el bus?, ¿qué distancia ha recorrido cada vehículo cuando el automóvil alcanza al bus?
- Si el bus sale del paradero a las 7 a. m. y el automóvil parte del mismo punto a las 10 a. m., en la misma dirección que el bus, ¿a qué distancia del paradero se encuentran los dos vehículos cuando uno sobrepasa al otro?, ¿a qué hora se encuentran los vehículos?
- Si el bus parte del paradero hacia la pista y el automóvil parte de la pista hacia el paradero, ambos a las 9 a. m., ¿a qué distancia del paradero se cruzan los dos vehículos si las ciudades están separadas por 200 km?

Acetato 1. Distancia recorrida por el bus

Bus 30 km/h

*Acetato 2. Distancia recorrida por el carro*

Carro 50 km/h



T5. Copias

Lee atentamente la siguiente situación y resuélvela desarrollando los puntos descritos a continuación con ayuda de la plantilla de Excel (ParamExcel).

[www.e-sm.net/2gemad01]

Un establecimiento en Bogotá quiere transmitir en directo el evento Gran Premio de Brasil de la Fórmula 1. Un local ofrece los siguientes planes a los organizadores para multicopiar volantes con la publicidad.

Plan 1: \$50 por copia.

Plan 2: Cuota diaria de \$4 000 más \$40 por copia.

Si los organizadores desean fotocopiar todos los volantes el mismo día, ¿Para qué cantidad de copias los planes representan igual costo?

- Identifica los valores dados en la situación y escríbelos en las casillas verdes de la plantilla en las cuales consideres deben estar. Ten en cuenta los títulos que preceden las casillas. Explica por qué has ubicado cada valor en cada casilla.
- Compara los valores obtenidos en la tabla de casillas amarillas y relaciónalos con la gráfica obtenida. ¿Los valores y la gráfica representan la situación dada? Explica tu respuesta.
- Revisa tus procesos y, de ser necesario, ubica nuevamente en las casillas verdes los valores identificados en la situación. Responde la pregunta dada.
- Explica qué relación existe entre las ecuaciones mostradas por la plantilla y los valores dados en la situación.

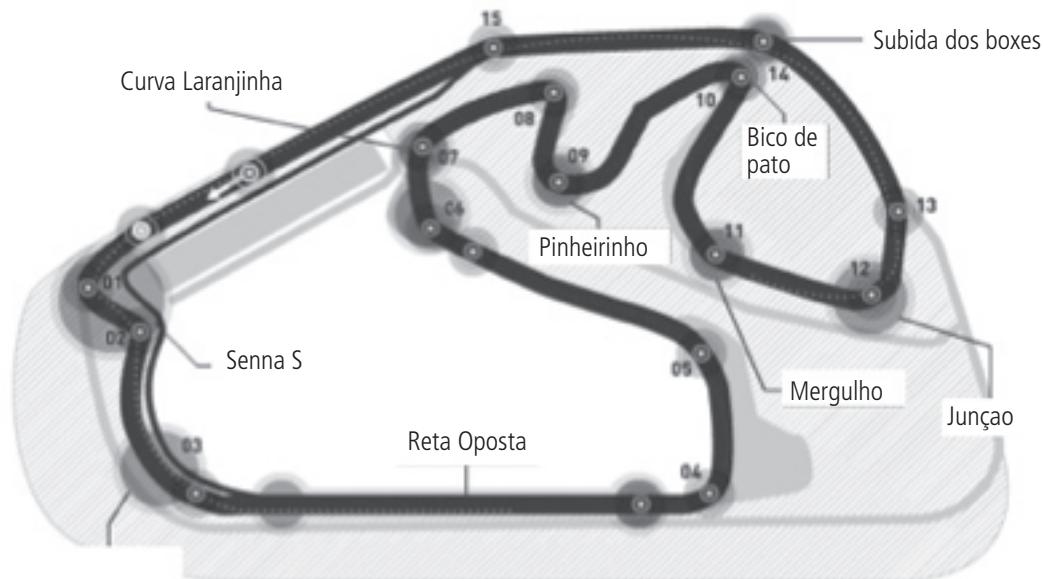
T6. Heladería

Por medio del programa Geogebra, resuelve la siguiente situación.

Dentro del establecimiento en que se transmite la carrera de la Fórmula 1 hay una venta de helados. El vendedor compra al proveedor helados a \$400 la unidad, paga un arriendo mensual por valor de \$150 000 y vende los helados a \$900 cada uno. Determina la función de costos, la función de ingresos y el punto de equilibrio.

EF. Evaluación final: Gran premio de Brasil

A continuación, encontrarás información relacionada con el Gran premio de Brasil de la Fórmula 1. Se presenta una imagen e información de la pista y dos tablas que muestran los resultados finales y el registro de paradas durante la competencia del 7 de noviembre de 2010.



Información de la pista	
Sao Paulo	
Fecha:	07 Nov 2010
Nombre del circuito:	Autódromo José Carlos Pace
Número de vueltas:	71
Longitud del circuito:	4 309 km
Distancia:	305 909 km
Récord de vuelta:	1:11473 JP Montoya (2004)

Encuentra una estimación de la vuelta y tiempo que transcurrió cuando un piloto pudo sobrepasar al menos una vez a otro piloto.

Parte 1. Elige tres pilotos de los presentados en las tablas anteriores. Discrimina la información relevante presentada en las tablas.

Parte 2. Encuentra una estrategia para determinar en qué vuelta y a qué tiempo transcurridos sobrepasa un piloto a otro. Discrimina la información faltante para llevar a cabo la estrategia elegida.

Parte 3. Reformula y presenta el plan de solución diseñado para la solución del problema.

Tabla de resultados finales en la competencia							
Pos	No	Piloto	Equipo	Vueltas	Tiempo	G	Pts
1	5	Sebastian Vettel	RBR-Renault	71	1:33:11 803	2	25
2	6	Mark Webber	RBR-Renault	71	+4,2 secs	3	18
3	8	Fernando Alonso	Ferrari	71	+6,8 secs	5	15
4	2	Lewis Hamilton	McLaren-Mercedes	71	+14,6 secs	4	12
5	1	Jenson Button	McLaren-Mercedes	71	+15,5 secs	11	10
6	4	Nico Rosberg	Mercedes GP	71	+35,3 secs	13	8
7	3	Michael Schumacher	Mercedes GP	71	+43,4 secs	8	6
8	10	Nico Hulkenber	Williams-Cosworth	70	+1 lap	1	4
9	11	Robert Kubica	Renault	70	+1 lap	7	2
10	23	Kamui Kobayashi	BMW Sauber-Ferrari	70	+1 lap	12	1
11	17	Jaime Alguersuari	STR-Ferrari	70	+1 lap	14	
12	14	Adrian Sutil	Force India-Mercedes	70	+1 lap	22	
13	16	Sebastian Buemi	STR-Ferrari	70	+1 lap	19	
14	9	Rubens Barrichello	Williams-Cosworth	70	+1 lap	6	
15	7	Felipe Massa	Ferrari	70	+1 lap	9	

Tabla de tiempos en pits							
Stops	No	Piloto	Equipo	Vueltas	Hora	Tiempo	Total tiempo Pit
1	1	Jenson Button	McLaren-Mercedes	11	14:17:48	21,054	21,054
1	7	Felipe Massa	Ferrari	12	14:19:05	21,025	21,025
1	9	Rubens Barrichello	Williams-Cosworth	13	14:20:23	29,061	29,061
2	7	Felipe Massa	Ferrari	13	14:20:47	25,161	46,186
1	10	Nico Hulkenber	Williams-Cosworth	14	14:21:39	21,884	21,884
1	11	Robert Kubica	Renault	14	14:21:41	22,278	22,278
1	22	Nick Heidfeld	BMW Sauber-Ferrari	14	14:21:45	21,648	21,648
1	20	Christian Klien	HRT-Cosworth	11	14:22:58	23,342	23,342
1	17	Jaime Alguersuari	STR-Ferrari	15	14:23:05	22,069	22,069
1	15	Vitantonio Liuzzi	Force India-Mercedes	16	14:24:30	21,242	21,242
1	24	Timo Glock	Virgin-Cosworth	16	14:24:53	21,950	21,950
1	19	Heikki Kovalainen	Lotus-Cosworth	17	14:26:11	21,480	21,480
1	16	Sebastian Buemi	STR-Ferrari	18	14:27:01	25,914	25,914
1	12	Vitaly Petrov	Renault	19	14:28:30	22,884	22,884
1	2	Lewis Hamilton	McLaren-Mercedes	20	14:29:25	21,255	21,255